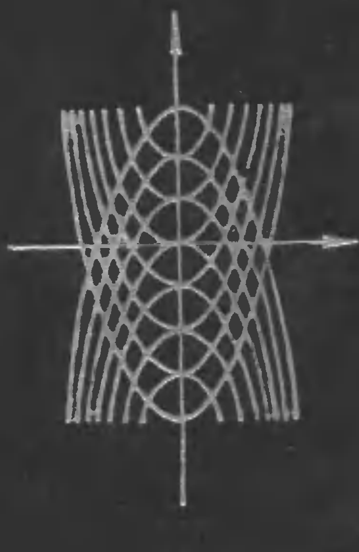
Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений



Н. М. МАТВЕЕВ

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Издание третье, исправленное и дополненное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для механико-математических
факультетов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1967

В книге даются основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, излагаются наиболее важные методы интегрирования, доказываются теоремы существования решений и исследуются свойства последних.

Являясь учебником для студентов университетов, она может быть использована в педагогических институтах и в технических вузах, а также студентами-заочниками и лицами, самостоятельно изучающими теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Николай Михайлович Матвеев

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Д. А. Тальский*
Художественный редактор *А. К. Зефиров*
Технический редактор *С. С. Горохова*
Корректор *Н. Д. Михалева*
Переплет *Б. А. Школьника*

Т-17205. Сдано в набор 5/VIII—66 г.
Подп. к печати 23/XII—66 г.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Объем 35,25 печ. л. Уч.-изд. л. 30,46.
Изд. № ФМ-245. Тираж 25000 экз. Цена 98 коп.
Зак. 494

Тематический план издательства «Высшая школа» на 1967 г. (вузы и техникумы). Позиция № 38.
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.
Издательство «Высшая школа».

Подольская типография Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Подольск, ул. Кирова, д. 25.

$\frac{2-2-3}{38-67}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе общего курса лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, который последние десятилетия читается на математико-механическом факультете Ленинградского государственного ордена Ленина университета им. А. А. Жданова.

При написании книги я ставил перед собой задачу изложить основные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и дать введение в общую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Книга состоит из введения и двенадцати глав.

Во введении дается понятие об основных задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В первой главе рассматриваются уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

Во второй главе изучаются уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

В третьей главе рассматриваются уравнения высших порядков.

Четвертая глава содержит общие вопросы теории систем дифференциальных уравнений.

Во всех этих главах даются основные понятия и определения и рассматриваются наиболее важные случаи интегрируемости в квадратурах. Вместе с тем при чтении этих глав читатель постепенно вводится в круг общих вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и подготавливается к чтению пятой главы книги.

В пятой — центральной — главе доказываются теорема существования и единственности непрерывно-дифференцируемого решения (теорема Пикара), теорема существования и единственности голоморфного решения (теорема Коши) и теорема существования решения уравнения с непрерывной правой частью (теорема Пеано). Здесь же доказываются теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров и начальных данных, а также теорема о дифференцируемости решения по начальным данным. В связи с вопросом о зависимости решения от начальных данных дается понятие об устойчивости решения (движения) в смысле А. М. Ляпунова. Доказывается также теорема существования общего решения, рассматривается вопрос об особых точках уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, и освещаются некоторые другие вопросы. На основе теорем существования и единственности снова рассматриваются и выясняются до конца теоретические вопросы, поставленные в предыдущих главах.

Изложение материала в последующих главах уже существенно опирается на теоремы существования и единственности, доказанные в пятой главе.

В шестой главе излагается общая теория линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Седьмая глава посвящена линейным уравнениям n-го порядка с постоянными коэффициентами и уравнениям, приводящимся к ним.

В восьмой главе освещаются некоторые дополнительные вопросы теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В том числе, на основе результатов аналитической теории дифференциальных уравнений, рассматривается вопрос об интегрировании при помощи обобщенных степенных рядов и в качестве примеров дается построение решений уравнения Бесселя и гипергеометрического дифференциального уравнения.

Девятая глава посвящена общей теории линейных систем дифференциальных уравнений.

В десятой главе изучаются линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В одиннадцатой главе излагается матричный метод решений однородных линейных систем дифференциальных уравнений.

В двенадцатой главе дается понятие об уравнениях с частными производными первого порядка.

Каждая глава разделена на параграфы, которые в свою очередь разбиты на пункты, причем для последних принята сквозная нумерация по всей книге. Формулы нумеруются в пределах параграфа, а примеры и замечания — в пределах пункта. Ссылки, как правило, делаются на формулы данного параграфа. В случае же ссылок на формулы находящиеся в других параграфах, указывается номер пункта (жирным шрифтом) и номер соответствующей формулы. Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Для логического ударения используется разрядка.

Во второе издание книги в связи с сокращением ее объема не вошли некоторые вопросы общей теории и некоторые примеры, поясняющие элементарные методы интегрирования. При этом часть теоретического материала и примеров была перенесена в книги: Н. М. Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во ЛГУ, 1960; М., Росвузиздат, 1962; Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения (Учебно-методическое пособие для заочников). Изд-во ЛГУ, 1963, 1965. Содержание этих книг органически связано с содержанием настоящей книги.

Читатель найдет также большое число интересных и подробно решенных примеров и задач в книгах: А. И. Киселев, М. А. Краснов, Г. И. Макаренко. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Высшая школа», 1965; К. К. Пономарев. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М., Учпедгиз, 1962; А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961; «Наука», 1965; А. Ф. Филиппов и Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. Методические указания для студентов-заочников механико-математических факультетов университетов. Изд-во ЛГУ, 1960.

Большое число (более 1500) обыкновенных дифференциальных уравнений с решениями, а также конспективное изложение многих разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в книге: Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961; «Наука», 1965.

В третьем издании исправлены отдельные погрешности второго издания, сделаны дополнения в изложении некоторых вопросов и восстановлена часть материала, не вошедшего во второе издание.

Пользуясь случаем, я обращаюсь с убедительной просьбой ко всем читателям сообщить в адрес издательства свои критические замечания и пожелания.

Н. М. Матвеев.

ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области; x — независимая переменная; y — функция переменной x, подлежащая определению; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — ее производные. При этом предполагается, что $y^{(n)}$ действительно входит в соотношение (1). Любой же из остальных аргументов функции F может в этом соотношении явно и не участвовать. Иногда обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка записывают в виде соотношения между аргументом x, функцией y и их дифференциалами, но тогда это соотношение должно быть обязательно таким, чтобы оно приводилось к виду (1).

Аналогичное соотношение, связывающее независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функцию этих переменных u и ее частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до порядка n включительно, называется *уравнением с частными производными n-го порядка.*

Например, *уравнение с частными производными первого порядка* имеет следующий общий вид:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{2}$$

где Φ есть известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области; u — искомая функция от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ — частные производные от функции u по независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем хоть одна из этих частных производных обязательно входит в соотношение (2).

В настоящей книге всюду, где не оговорено противное, рассматриваются о б ы к н о в е н н ы е дифференциальные уравнения, причем как независимая переменная, так и искомые функции предполагаются в е щ е с т в е н н ы м и.

Всякая функция, определенная вместе с соответствующими производными в некоторой области, называется *решением* дифференциального уравнения в этой области, если она обращает его в тождество*, справедливое для всех точек упомянутой области.

В частности, $y = y(x)$ будет решением уравнения (1) в интервале (a, b), если

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b). \tag{3}$$

Например, дифференциальным уравнением первого порядка будет

$$y' - 2x = 0 \quad \text{или} \quad y' = 2x. \tag{4}$$

Из интегрального исчисления мы знаем, что все функции, удовлетворяющие уравнению (4) или, как мы теперь скажем, все решения уравнения (4) даются формулой

$$y = x^2 + C \; (-\infty < x < +\infty), \tag{5}$$

где C — *произвольная постоянная*. Из этой формулы, между прочим, следует, что уравнение (4) имеет не одно, а бесчисленное множество решений (при каждом числовом значении C получаем свое решение). В гл. V доказано, что *уравнение первого порядка при соблюдении некоторых условий вообще имеет семейство решений, зависящее от одного произвольного параметра, а уравнение n-го порядка имеет семейство решений, зависящее от n произвольных параметров*. Например, уравнение

$$y^{(n)} = 0 \tag{6}$$

имеет семейство решений

$$y = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \tag{7}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные*.

Получение семейства решений, содержащего произвольные постоянные, представляется весьма важным потому, что мы, распоряжаясь значениями этих произвольных постоянных, можем получать решения, удовлетворяющие тем или иным дополнительным условиям.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи из механики, физики, астрономии и других естественных наук, а также многие проблемы техники. Поясним на примерах, как возникают в исследованиях дифференциальные уравнения.

---

* Вообще выполнение некоторого тождества относительно переменной x (или совокупности переменных) мы всегда будем понимать в том смысле, что обе части этого тождества для всех допустимых значений x (или совокупности переменных) определены и совпадают.

Пример 1. Материальная точка движется по некоторой прямой, причем так, что скорость движения представляет собою известную функцию времени $f(t)$. Требуется найти закон движения этой точки, т. е. формулу, определяющую положение точки в зависимости от времени.

Примем упомянутую прямую за ось Ox. Тогда положение точки определяется одной координатой x и задача состоит в том, чтобы выразить x как функцию от t.

Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \tag{8}$$

Предположим, что $f(t)$ непрерывна в интервале (a, b). Тогда, как известно из интегрального исчисления, в с е решения уравнения (8) содержатся в формуле:

$$x = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + C \qquad (a < t < b), \tag{9}$$

где верхний предел интеграла — переменный, нижний предел t_0 есть некоторое фиксированное число из интервала (a, b), а C — произвольная постоянная.

Так как в формулу (9) входит п р о и з в о л ь н а я п о с т о я н н а я, то мы не получили о п р е д е л е н н о г о закона движения точки. Это соответствует известному факту, что задание одной только скорости не определяет полностью закон движения. Формула (9) содержит целое с е м е й с т в о движений, обладающих одним и тем же свойством, выраженным дифференциальным уравнением (8). Это свойство состоит в том, что все движения, определяемые уравнением (8), имеют одну и ту же скорость в любой (но в один и тот же) момент времени t.

Выделим из семейства движений (9) то движение, при котором движущаяся точка занимает з а д а н н о е п о л о ж е н и е x_0 в з а д а н н ы й м о м е н т в р е м е н и t_0, т. е. найдем решение (движение) $x = x(t)$, удовлетворяющее условию:

$$x = x_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{10}$$

Число x_0 называется *начальным значением искомой функции (начальным положением точки)*, а t_0 — *начальным значением аргумента (начальным моментом времени)*. Числа t_0 и x_0 вместе взятые называются *начальными данными*, а условие (10) — *начальным условием* решения (движения). Подставим в (9) вместо t и x соответственно t_0 и x_0. Получим $x_0 = C$, так что з н а ч е н и е п р о и з в о л ь н о й п о с т о я н н о й C определяется из начального условия и представляет собою в нашем случае н а ч а л ь н о е з н а ч е н и е и с к о м о й ф у н к ц и и. Заменяя теперь в (9) постоянную C на x_0, получаем искомое движение:

$$x = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + x_0 \qquad (a < t < b). \tag{11}$$

Действительно, движение, определяемое формулой (11), таково, что $x = x_0$ при $t = t_0$. Формула (11) выражает уже вполне о п р е д е л е н н ы й закон движения точки по оси Ox.

Пример 2. Материальная точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести, причем известны ее п о л о ж е н и е и с к о р о с т ь в некоторый момент времени t_0. Найти закон движения.

Примем нашу прямую за ось Oy; начало координат поместим у поверхности Земли, а ось Oy направим вверх. Обозначим положение точки и скорость в момент времени t_0 соответственно через y_0 и v_0.

Принимая во внимание механический смысл второй производной, мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \tag{12}$$

где g — ускорение силы тяжести. Наша задача сводится к нахождению того решения $y = y(t)$ уравнения (12), которое удовлетворяет условиям:

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{13}$$

Числа t_0, y_0 и v_0 называются *начальными данными*, а условия (13) — *начальными условиями* решения (движения).

Интегрируя последовательно уравнение (12), получаем:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1; \tag{14}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{15}$$

Формула (15), где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, содержит все решения уравнения (12). Выделим из нее решение, удовлетворяющее начальным условиям (13), где для упрощения дальнейших выкладок будем считать $t_0 = 0$. Для этого подставим в (14) и (15) вместо величин t, y и $\frac{dy}{dt}$ их начальные значения 0, y_0 и v_0. Получим $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$, так что значения произвольных постоянных C_1 и C_2 определяются из начальных условий (13) и представляют собою в нашем случае начальные значения искомой функции и ее производной. Заменяя теперь в (15) C_1 и C_2 найденными их значениями, получаем:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \tag{16}$$

Эта формула и дает искомый закон движения.

Пример 3. Найти все кривые на плоскости (x, y), имеющие кривизну, равную нулю.

Пусть $y = y(x)$ есть искомая кривая. Тогда из формулы кривизны

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k \tag{17}$$

в силу условия задачи следует, что

$$y'' = 0. \tag{18}$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$y = C_1 x + C_2. \tag{19}$$

Это всевозможные прямые на плоскости (x, y), не параллельные оси Oy. Прямые вида

$$x = a \tag{20}$$

тоже имеют кривизну, равную нулю. Но они не являются решениями дифференциального уравнения (18).

Пример 4. Найти дифференциальное уравнение семейства всех окружностей на плоскости (x, y):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{21}$$

Здесь три параметра: a, b и R. Учитывая, что y есть функция от x, определяемая уравнением (21), и дифференцируя это уравнение полным образом по x три раза, находим:

$$\left.\begin{aligned} x-a+(y-b)\,y'&=0,\\ 1+y'^2+(y-b)\,y''&=0,\\ 3y'\,y''+(y-b)\,y'''&=0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Исключим из четырех уравнений (21), (22) все параметры. Фактически нужно исключить лишь параметр b из последних двух уравнений, после чего получим искомое дифференциальное уравнение

$$3y'\,y''^2-(1+y'^2)\,y'''=0. \tag{23}$$

Это есть обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Подобно тому, как показано в рассмотренных примерах, вообще *обыкновенное дифференциальное уравнение может быть получено часто из физических или геометрических соображений, либо формально исключением параметров из уравнения n-параметрического семейства функций и n равенств, полученных из него последовательным дифференцированием.*

Если мы сумеем проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, то тем самым дадим ответы на вопросы задачи, которая привела нас к этому уравнению.

Поэтому *основной задачей теории интегрирования дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.*

Исключительно большой интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее многочисленных приложений представляет *задача нахождения или хотя бы доказательство существования решения, удовлетворяющего заданным условиям.*

Заметим, что самую *задачу интегрирования* дифференциального уравнения можно понимать по-разному. В самой узкой постановке задачи ставится целью выражение искомых функций через *элементарные*. Эта задача, вообще говоря, не разрешима даже для самого простого уравнения $y'=f(x)$, ибо, как известно, не всегда первообразная для элементарной функции представляет собою тоже элементарную функцию. В качестве примера можно взять хотя бы уравнение

$$y'=\frac{\sin x}{x}. \tag{24}$$

Несколько шире постановка задачи, при которой уравнение считается решенным, если оно приведено к *квадратурам* (т. е. операциям взятия неопределенных интегралов). В этом смысле уравнение (24) очевидно разрешимо. Все решения этого уравнения содержатся в формуле

$$y = \int \frac{\sin x}{x} \, dx + C. \tag{25}$$

Здесь первый член справа есть какая-нибудь фиксированная первообразная функция для функции $\frac{\sin x}{x}$, а C — произвольная постоянная.

Вообще под *символом* $\int f(x)\,dx$ мы будем понимать какую-нибудь фиксированную первообразную, а постоянную интегрирования будем писать отдельно.

В дальнейшем будет показано, что большое количество уравнений удается проинтегрировать в квадратурах. При этом под *интегрируемостью данного уравнения в квадратурах* надо понимать представление решения в виде квадратур от элементарных функций и функций, входящих в уравнение.

Однако следует отметить, что уравнения, интегрируемые в квадратурах, составляют лишь незначительную часть всех дифференциальных уравнений. Так, например, очень важное во многих вопросах *уравнение Бесселя*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0 \tag{26}$$

в общем случае не интегрируется в квадратурах.

В более общей постановке задачи ищется правило вычисления значения искомой функции по заданному значению аргумента, например ищут выражение искомой функции в виде равномерно сходящегося ряда удовлетворяющего уравнению. В этом смысле, как увидим далее, уравнение (26) разрешимо при любом n.

Задача *общей теории дифференциальных уравнений* состоит в изучении свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями непосредственно по виду любого заданного дифференциального уравнения, независимо от интегрируемости последнего в элементарных функциях или в квадратурах.

Устанавливая существование решения, удовлетворяющего тем или иным дополнительным условиям, либо обладающим теми или иными свойствами, общая теория обыкновенных дифференциальных уравнений дает во многих случаях и общие методы построения решений, причем в результате применения этих методов иногда удается выделить новые типы уравнений, интегрируемые и в элементарных функциях или в квадратурах.

Несмотря на большое количество результатов, полученных в общей теории дифференциальных уравнений, в том числе, особенно, в последние годы*, элементарные методы интегрирования по-прежнему остаются важными методами интегрирования.

В настоящей книге излагаются основные методы интегрирования различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, доказаны основные теоремы существования решений (методы доказательства которых позволяют строить приближенные решения**) и теоремы о зависимости решений от самого уравнения и от начальных данных, а также дается понятие об основных задачах общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

При изложении различных методов интегрирования мы пытаемся везде, где это возможно, получить решение в виде элементарных функций или квадратур элементарных функций. В тех случаях, когда это невозможно, указываются методы интегрирования в смысле более широкой постановки задачи. При этом используются некоторые результаты общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим в заключение, что обыкновенные дифференциальные уравнения, представляющие сами по себе большой теоретический и практический интерес, являются фундаментом для многих других разделов высшей математики, например для уравнений с частными производными, уравнений математической физики, вариационного исчисления, а также — базой для глубокого изучения механики, физики и других естественных наук.

---

* О развитии общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений в работах советских математиков см. обзорную статью В. В. Немыцкого «Обыкновенные дифференциальные уравнения» в книге «Математика в СССР за сорок лет (1917—1957)», т. 1. М., Физматгиз, 1959, стр. 511—562. Библиографии по обыкновенным дифференциальным уравнениям, опубликованные за рубежом в 1931—1957 гг. и аннотации к ним см. в книге «Основные иностранные библиографические источники по математике и механике (1931—1957)», составленной А. М. Лукомской под редакцией С. М. Лозинского. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1960, стр. 90—92.

** О приближенных методах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений см.: А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. М., Гостехиздат, 1950; Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, 1953; Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957; И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II. М., Физматгиз, 1960; Математический практикум. Под редакцией Г. Н. Положего. М., Физматгиз, 1960; Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1962; И. П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Понятие об уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной. В соответствии со сказанным во введении, уравнение *первого* порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

В этой главе мы будем рассматривать *уравнение, разрешенное относительно производной:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y). \tag{2}$$

Наряду с этим уравнением мы всегда будем рассматривать *перевернутое уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,\ y)}, \tag{2'}$$

используя последнее в окрестности тех точек, в которых $f(x,\ y)$ обращается в б е с к о н е ч н о с т ь.

Во многих случаях оказывается целесообразным вместо уравнений (2) и (2′) рассматривать одно равносильное им дифференциальное уравнение

$$dy - f(x,\ y)\ dx = 0. \tag{3}$$

Обе переменные x и y входят в это уравнение уже р а в н о п р а в н о, и любую из них мы можем принять за независимую переменную.

Умножая обе части уравнения (3) на некоторую функцию $N(x, y)$, получаем более симметричное уравнение:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{4}$$

где $M(x, y) = -f(x, y)\, N(x, y)$. Обратно, всякое уравнение вида (4) можно переписать в виде уравнений (2) или (2′), разрешая его относительно $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$, так что уравнение (4) равносильно следующим двум уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{5}$$

Иногда уравнение записывают в так называемой *симметрической форме*:

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}. \tag{6}$$

2. Решение уравнения. Предположим, что правая часть уравнения (2), $f(x, y)$, определена на некотором подмножестве A вещественной плоскости (x, y). Функцию $y = y(x)$, определенную в интервале (a, b), мы будем называть *решением* уравнения (2) в этом интервале*, если:

1) Существует производная $y'(x)$ для всех значений x из интервала (a, b)**. (Отсюда следует, что решение $y = y(x)$ представляет собою функцию, непрерывную во всей области определения).

2) Функция $y = y(x)$ обращает уравнение (2) в тождество:

$$y'(x) \equiv f[x, y(x)], \tag{7}$$

справедливое для всех значений x из интервала (a, b). Это означает, что при любом x из интервала (a, b) точка $[x, y(x)]$ принадлежит множеству A и $y'(x) = f[x, y(x)]$***.

Так как наряду с уравнением (2) рассматривается перевернутое уравнение (2′), то и решения $x = x(y)$ этого перевернутого уравнения естественно присоединять к решениям уравнения (2). В этом смысле в дальнейшем мы будем для краткости называть решения уравнения (2′) решениями уравнения (2).

Пример 1. Функция

$$y = e^{2x} + e^{x} \tag{8}$$

является решением уравнения

$$y' = y + e^{2x} \tag{9}$$

---

* Решение $y = y(x)$ может быть определено и в интервалах вида: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

** В случае, когда решение $y = y(x)$ определено на интервале, замкнутом с одного или с обоих концов, под производной функции $y(x)$ на конце интервала мы понимаем соответствующую одностороннюю производную. (См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. I. М., Гостехиздат, 1956, стр. 16.)

*** См. сноску на стр. 15.

в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо она определена и дифференцируема в этом интервале, и, подставляя ее в уравнение (9), получаем тождество:

$$2e^{2x} + e^{x} \equiv e^{2x} + e^{x} + e^{2x}, \tag{10}$$

справедливое при всех значениях x.

Пример 2. Функция

$$y = \operatorname{tg} x \tag{11}$$

есть решение уравнения

$$y' = y^2 + 1 \tag{12}$$

в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 3. Функция

$$y = \frac{1}{1-x} \tag{13}$$

является решением уравнения

$$y' = y^2 \tag{14}$$

в интервале $(-\infty, 1)$.

Иногда функцию $y = y(x)$, обращающую уравнение (2) в тождество (7), т. е. решение уравнения (2), называют *интегралом* этого уравнения. Мы будем употреблять термин и н т е г р а л только в смысле п. **16**.

3. Неявное и параметрическое задания решения. Далеко не всегда удается получить решение дифференциального уравнения в явном виде. Кроме того, явное задание решения и не всегда удобно для его изучения и использования. Поэтому при интегрировании уравнения во многих случаях удовлетворяются получением решения в неявном виде. Мы будем говорить, что уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{15}$$

определяет *в неявной форме решение* уравнения (2), если оно определяет y как неявную функцию от x, $y = y(x)$, и если эта последняя является решением уравнения (2).

В этом случае, полагая в (15) $y = y(x)$, дифференцируя полученное тождество по x и заменяя $\frac{dy}{dx}$ на $f(x, y)$, приходим к равенству

$$\Phi'_x + \Phi'_y f(x, y) = 0, \tag{16}$$

которое должно выполняться тождественно в силу соотношения (15).

Пример 1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}. \tag{17}$$

Возьмем уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{18}$$

и составим равенство (16). Получим:

$$2x + 2y\,\frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)} = 0. \tag{19}$$

Это равенство удовлетворяется в силу уравнения (18). Следовательно, последнее определяет в неявной форме решение данного дифференциального уравнения.

Иногда решение уравнения (2) получается в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{20}$$

Мы будем говорить, что уравнения (20) определяют *решение уравнения* (2) *в параметрической форме* в интервале (t_0, t_1), если в этом интервале имеет место тождество:

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f[\varphi(t), \quad \psi(t)]. \tag{21}$$

Пример 2. Уравнения

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \tag{22}$$

определяют решение уравнения

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y} \tag{23}$$

в интервале $[0, 2\pi]$, ибо в этом интервале имеет место тождество*

$$\frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{a\cos t}{b\sin t}. \tag{24}$$

4. Геометрическое истолкование. Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты на плоскости. Тогда решению $y = \varphi(x)$, $\Phi(x, y) = 0$ или $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

будет соответствовать некоторая кривая, которая называется *интегральной кривой* этого уравнения. Иногда сама интегральная кривая называется *решением*. Каков геометрический смысл интегральных кривых? Чем выделяются они среди всевозможных кривых, которые мы можем провести на плоскости?

Будем предполагать, что интегральные кривые, о которых идет речь, существуют. Вопрос об условиях существования интегральных кривых мы рассматриваем в пунктах **6** и **7**.

Предположим, что правая часть уравнения (2) определена и конечна в каждой точке некоторой области G** изменения

---

* Причем для $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$ нужно рассматривать перевернутое тождество, соответствующее перевернутому уравнению $x'_y = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$.

** Под *областью* G вообще мы будем понимать непустое множество G точек, обладающее двумя свойствами: 1) каждая точка множества G есть *внутренняя*, т. е. принадлежат ему вместе с некоторой своей окрестностью; 2) множество G *связно*, т. е. каждые две точки этого множества можно

x и y (рис. 1). Проведем через каждую точку $M(x, y)$ этой области отрезок [для определенности будем считать, что этот отрезок *единичный*, т. е. длина его равна единице, и что середина его лежит в точке $M(x, y)$], составляющий с осью Ox угол α, тангенс которого равен значению правой части уравнения (2) в этой точке, $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$, причем оба направления указанного отрезка для нас безразличны. Таким образом, можно считать, что уравнение (2) определяет некоторое *поле направлений.*

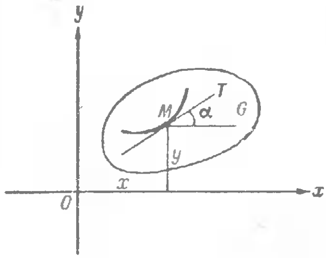


Рис. 1

Тогда уравнение (2) выражает геометрически тот факт, что направление касательной в каждой точке интегральной кривой совпадает с направлением поля в этой точке. Это свойство и выделяет интегральные кривые среди всех прочих кривых.

Всякое дифференциальное уравнение первого порядка выражает некоторое общее свойство касательных всех его интегральных кривых. Задача интегрирования состоит в том, чтобы по этому свойству восстановить само семейство интегральных кривых.

Пример 1. Возьмем уравнение

$$y' = 2x. \tag{25}$$

Ему удовлетворяет функция $y = x^2$, которой соответствует парабола с вершиной в начале координат, но ему удовлетворяет и всякая функция вида $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, т. е. интегральные кривые составляют целое семейство парабол (рис. 2). Все они обладают одним общим свойством; в каждой точке $M(x, y)$ любой интегральной кривой угловой коэффициент касательной MT равен удвоенной абсциссе этой точки: $\operatorname{tg}\alpha = 2x$.

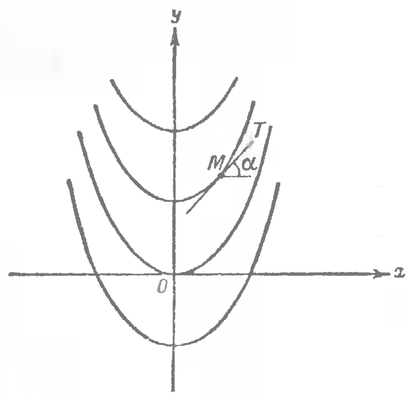


Рис. 2

Кривая, в каждой точке которой наклон поля, определяемого дифференциальным уравнением (2), один и тот же, назы-

---

соединить ломаной, состоящей из конечного числа звеньев, которая целиком лежит внутри G.

Совокупность точек, которые являются предельными для точек области G, но не принадлежат этой области, называется *границей области* G.

Область G вместе с ее границей называется *замкнутой областью* G или *замыканием* области G.

вается *изоклиной* этого уравнения. Уравнение изоклины имеет вид

$$f(x, y) = k, \tag{26}$$

где k — постоянное число.

Пример 2. Рассмотрим вопрос об изоклинах уравнения (25). Приравнивая правую часть постоянному числу k, видим, что изоклинами являются прямые, параллельные оси Oy. В частности во всех точках прямой $x = \frac{1}{2}$ наклон поля будет равен 1, так что касательные ко всем интегральным кривым, пересекающим эту прямую, образуют угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Ox. Используя достаточно «густое» семейство изоклин, мы можем получить отчетливое представление об интегральных кривых уравнения (25) (рис. 3).

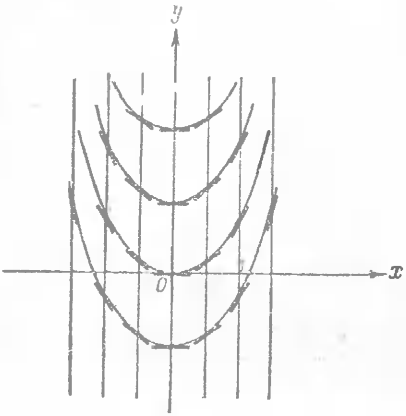


Рис. 3

Если в уравнении (2) правая часть сохраняет положительный (отрицательный) знак, то всякое решение уравнения возрастает (убывает) в каждой своей точке, так что все интегральные кривые направлены вверх (вниз). Линия, обладающая тем свойством, что через каждую точку ее проходит интегральная кривая и последняя (если она не совпадает с этой линией) имеет в этой точке экстремум, называется *линией экстремумов.*

В примере 1 линией экстремумов, а именно линией минимумов является, очевидно, ось $Oy(x = 0)$, ибо на ней $y' = 0$, а слева и справа от нее y' имеет соответственно знаки минус и плюс.

Если вторая производная от y в силу уравнения (2), т. е. функция

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \tag{27}$$

сохраняет положительный (отрицательный) знак, то всякая интегральная кривая вогнута вверх (вниз). Линия, в точках которой интегральные кривые имеют перегиб, называется *линией точек перегиба.*

Мы предполагали выше, что $f(x, y)$ конечна в каждой точке рассматриваемой области G. Тем самым мы исключали направления, параллельные оси Oy. Геометрически это исключение никак не может быть оправдано. Чтобы принять во внимание и эти направления, мы всегда будем, как уже сказано в п. **1**, наряду с уравнением (2) рассматривать уравнение (2′),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)},$$

используя его в окрестности тех точек, в которых $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Если правая часть уравнения (2) обращается в некоторой точке (x_0, y_0) в н е о п р е д е л е н н о с т ь вида $\frac{}{0}$ (которая не раскрывается), то и правая часть уравнения (2′) имеет в этой точке неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В таком случае мы будем говорить, что в этой точке п о л е н е о п р е д е л е н о и что ч е р е з н е е н е п р о х о д и т н и о д н а и н т е г р а л ь н а я к р и в а я. Это не исключает возможности существования интегральных кривых вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$, обладающих соответственно свойством

$$y(x) \to y_0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \tag{28}$$

или

$$x(y) \to x_0 \quad \text{при} \quad y \to y_0. \tag{29}$$

Относительно таких интегральных кривых мы будет говорить, что они *примыкают* к точке (x_0, y_0).

В соответствии с этим мы считаем, что ни одна интегральная кривая уравнения (4) не проходит через такую точку (x_0, y_0), в которой $M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль. Речь может идти лишь об интегральных кривых, п р и м ы к а ю щ и х к такой точке.

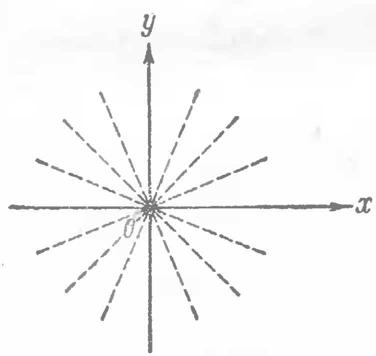


Рис. 4а

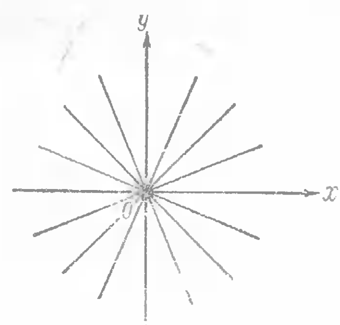


Рис. 4б

Пример 3. Построить поле направлений и найти интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{30}$$

Здесь в точке $x = 0$, $y = 0$ поле не определено. Для точек $x=0$, $y \neq 0$ будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}. \tag{31}$$

Очевидно, что в каждой точке (x, y) $[\neq (0, 0)]$ направление поля совпадает с направлением прямой, проходящей через эту точку и начало координат (рис. 4*а*).

Поэтому интегральными кривыми являются полупрямые:

$$y = kx \ (x \neq 0). \tag{32}$$

Верхняя и нижняя части оси Oy,

$$x = 0 \ (y \neq 0), \tag{33}$$

тоже являются интегральными кривыми, что вытекает из рассмотрения уравнения (31).

Таким образом интегральными кривыми уравнения (30) являются все полупрямые, выходящие из начала координат (рис. 4*б*)*. Эти же полупрямые будут очевидно изоклинами.

Пример 4. Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{34}$$

Здесь в точке $x = 0$, $y = 0$ поле также не определено, а для точек $x \neq 0$, $y = 0$ следует рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \tag{34'}$$

Изоклинами служат также полупрямые, выходящие из начала координат, как и в предыдущем примере. Но если там каждая изоклина была интегральной кривой, то здесь ни одна из них не является интегральной кривой.

Сравнивая правые части уравнений (34) и (30), мы видим, что поле, определяемое уравнением (34) (рис. 5а) ортогонально к полю, определяемому уравнением (30) (рис. 4*а*), т. е. в каждой точке (x, y) направления, задаваемые этими уравнениями, взаимно перпендикулярны. Поэтому интегральными кривыми уравнения (34) являются окружности с центром в начале координат (рис. 5*б*):

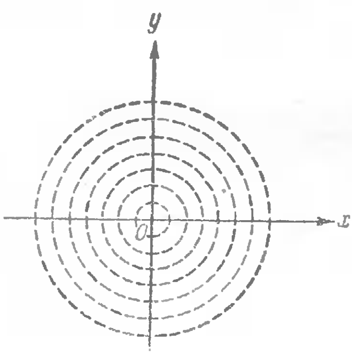


Рис. 5а

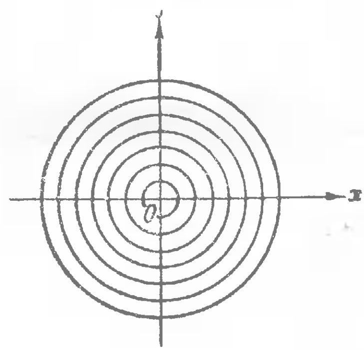


Рис. 5б

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{35}$$

Через точку (0, 0) не проходит и к ней не примыкает ни одна интегральная кривая, а в точках пересечения интегральных кривых с осью Ox касательные параллельны оси Oy, что согласуется с направлением поля в этих точках, если принять во внимание уравнение (34').

---

* Интегральными кривыми уравнения $ydx - xdy = 0$, эквивалентного уравнениям (30) и (31), являются те же полупрямые, выходящие из начала координат.

5. Задача Коши. Одной из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений является так называемая задача Коши. Для уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

задача Коши, или *начальная задача,* ставится следующим образом: среди всех решений уравнения (2) найти такое решение

$$y = y(x), \tag{36}$$

в котором функция $y(x)$ принимает заданное числовое значение y_0 при заданном числовом значении x_0 независимой переменной x, т. е.

$$y(x_0) = y_0, \tag{37}$$

где x_0 и y_0 — заданные числа, так что решение (36) удовлетворяет условию:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{38}$$

При этом число y_0 называется *начальным значением искомой функции*, а число x_0 — *начальным значением независимой переменной.* В целом же числа x_0 и y_0 называются *начальными данными* решения (36), а условие (38) — *начальным условием* этого решения.

Задачу Коши геометрически можно сформулировать так: среди всех интегральных кривых уравнения (2) найти ту (рис. 6), которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Будем говорить, что *задача Коши с начальными условиями* (38) *имеет единственное решение,* если существует такое число $h > 0$, что в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ определено решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и не существует решения, определенного в этом же интервале и не совпадающего с решением $y = y(x)$ хотя бы в одной точке интервала $|x - x_0| \leqslant h$, отличной от точки $x = x_0$. В противном случае, т. е. когда задача Коши с начальным условием (38) имеет не одно решение или же совсем не имеет решений, мы будем говорить, что в *точке* (x_0, y_0) *нарушается единственность решения задачи Коши.*

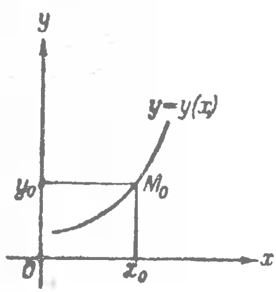


Рис. 6

Вопрос о единственности решения задачи Коши представляет исключительный интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее многочисленных приложений, ибо, зная, что решение задачи Коши единственно, мы, найдя решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, уверены, что других решений, удовлетворяющих тем же начальным условиям, нет. В вопросах естествознания это приводит к тому, что мы получаем вполне определенный, единственный закон явления, определяемый только дифференциальным уравнением и начальным условием. Иллюстрацией сказанного может служить хотя бы **пример 1**, рассмотренный во введении.

Заметим, что в простейшем случае задача Коши встречается нам уже в интегральном исчислении, именно там, по существу, доказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то единственным решением уравнения

$$y' = f(x), \tag{39}$$

принимающим значение y_0 при $x = x_0$, где x_0 принадлежит интервалу (a, b), а y_0 — любое заданное число, является функция*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + y_0. \tag{40}$$

Это решение определено во всем интервале (a, b).

Из формулы (40) легко усмотреть характер зависимости решения рассматриваемой задачи Коши как от независимой переменной, так и от начальных данных.

Прежде всего из курса анализа известно, что решение (40) является непрерывно дифференцируемой** функцией от независимой переменной x. Геометрически это означает, что через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая. Эта интегральная кривая гладкая***. Она пересекается со всякой прямой, параллельной оси Oy, не более чем в одной точке.

Из формулы (40) видно также, что решение задачи Коши для *простейшего дифференциального уравнения* (39) является непрерывной и даже непрерывно дифференцируемой функцией начальных данных x_0 и y_0.

Особые случаи задачи Коши. При постановке задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 мы неявно предполагали, что числа x_0 и y_0 конечны и что правая часть уравнения (2) определена и конечна в точке (x_0, y_0), т. е. уравнение (2) задает в точке (x_0, y_0) определенное направление поля, причем последнее не параллельно оси Oy. Если правая часть уравнения (2) обращается в точке (x_0, y_0) в бесконечность, то сле-

* Ср. **Введение,** пример 1, формула (11).

** Функция называется *непрерывно дифференцируемой,* если она имеет непрерывную первую производную.

*** Кривая называется *гладкой,* если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную.

дует рассматривать перевернутое уравнение (2′).

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,\ y)},$$

и искать решение $x=x(y)$ (рис. 7), удовлетворяющее начальному условию: $x=x_0$ при $y=y_0$. Единственная «особенность» решения этой задачи Коши состоит только в том, что в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ касательная к интегральной кривой параллельна оси Oy.

Совсем другое положение мы будем иметь, если в точке $(x_0,\ y_0)$ правая часть уравнения (2) не определена. Предположим, что $f(x,\ y)$ обращается в точке $(x_0,\ y_0)$ в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Тогда обычная постановка задачи Коши теряет смысл, так как через точку $(x_0,\ y_0)$ не проходит ни одна интегральная кривая. В этом случае *задача Коши* ставится так: найти решение вида $y=y(x)$ [или $x=x(y)$], обладающее свойством (28) [или (29)], т. е. найти решение, п р и м ы к а ю щ е е к точке $(x_0,\ y_0)$.

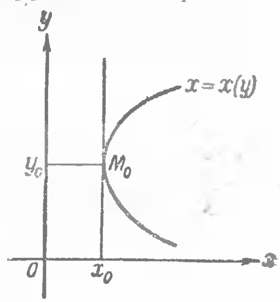


Рис. 7

Здесь, так же как и в основном случае задачи Коши, возникают вопросы с у щ е с т в о в а н и я и е д и н с т в е н н о с т и решения.

Кроме того, здесь возникают и дополнительные вопросы: 1) имеют ли решения, примыкающие к точке $(x_0,\ y_0)$, о п р е д е л е н н у ю касательную в этой точке? Дело в том, что само уравнение (2) в этом случае не предписывает никакого определенного направления касательной в такой точке $(x_0,\ y_0)$; 2) если интегральные кривые примыкают к точке $(x_0,\ y_0)$ с определенными направлениями касательной, то к а к о в ы эти направления? Сколько кривых входит по данному направлению?

В примерах 3 и 4, рассмотренных в п. 4, все интегральные кривые уравнения (30) примыкают к точке (0,0) (где правая часть обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$), имея в ней каждая свою касательную, в то время как ни одна из интегральных кривых уравнения (34) не примыкает к точке (0,0), так что для этого уравнения задача Коши с начальными данными $x_0=0$, $y_0=0$ не имеет ни одного решения.

В некоторых случаях возникает необходимость искать решения $y=y(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{array}{c} y\to y_0\ (\neq\infty)\ \text{при}\ x\to\infty,\ \ y\to\infty\ \ \text{при}\ \ x\to x_0\ (\neq\infty)\ \ \text{или} \\ y\to\infty\ \ \text{при}\ \ x\to\infty. \end{array}\right\}\quad(38')$$

Указанные выше особые случаи задачи Коши исследуются в аналитической теории дифференциальных уравнений и в качественной теории дифференциальных уравнений.

Во всех случаях задачи Коши наряду с вопросами существования и единственности возникают вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной (аналитический вид, дифференциальные и геометрические свойства и особенности поведения во всей области существования) и как функции начальных данных. Рассмотрение этих вопросов составляет одну из основных задач теории дифференциальных уравнений.

6. Достаточное условие существования решения задачи Коши. Предположим, что правая часть уравнения (2) определена и непрерывна в некоторой области G изменения x и y. Тогда, как уже отмечалось раньше (п. **4**), уравнение (2) определяет некоторое поле направлений, причем в силу только что сделанного предположения о непрерывности правой части уравнения (2) это поле направлений непрерывно, так что направления в двух достаточно близких точках разнятся сколь угодно мало. Заметим, что из сделанного предположения о непрерывности правой части уравнения (2) следует, что всякое решение этого уравнения (если оно существует) будет непрерывно дифференцируемым, так что всякая интегральная кривая будет гладкой. Всякая интегральная кривая, как уже было сказано в п. **4**., обладает тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с направлением поля, определяемым дифференциальным уравнением в этой точке. Попытаемся, пользуясь этим свойством интегральной кривой, найти решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными x_0, y_0 из области G.

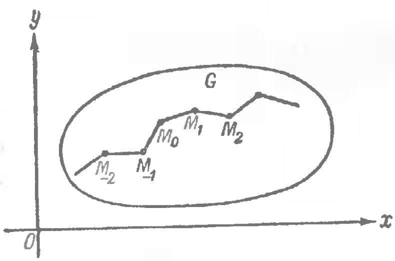


Рис. 8

Возьмем в области G некоторую точку M_0 (x_0, y_0) (рис. 8). Наклон поля в этой точке равен $f(x_0, y_0)$. Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. На этой прямой возьмем любую точку $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащую области G, и через нее проведем прямую с угловым коэффициентом, равным наклону поля в этой точке, т. е. $f(x_1, y_1)$. На последней прямой возьмем любую точку M_2 (x_2, y_2), принадлежащую области G, и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом f (x_2, y_2) и т. д. Такое же построение можно сделать и влево от точки $x = x_0$. Построенная ломаная линия называется *ломаной Эйлера*.

Ясно, что можно построить бесчисленное множество ломаных Эйлера, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$. Каждая из этих ломаных с достаточно короткими звеньями дает некоторое представление об интегральной кривой, проходящей через точку

$M_0(x_0, y_0)$, если эта интегральная кривая существует. Естественно ожидать, что мы можем построить последовательность ломаных Эйлера, имеющую своим пределом (когда длины всех звеньев ломаной стремятся к нулю, а их число стремится к бесконечности) интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$. Можно доказать*, что при сделанном предположении относительно $f(x, y)$ это действительно имеет место, так что *для существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для уравнения* (2) *достаточно предположить, что его правая часть* ***непрерывна*** *в окрестности начальных данных* (теорема Пеано).

Заметим, однако, что не исключена возможность существования нескольких последовательностей ломаных Эйлера, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, каждая из которых стремится к своей интегральной кривой, так что в общем случае нет оснований ожидать, что мы получим единственную интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$. Более того, как показал М. А. Лаврентьев**, единственность решения может нарушаться даже во всех точках непрерывности правой части уравнения (2).

Таким образом, теорема Пеано есть только теорема существования решения задачи Коши. Единственности решения она не гарантирует.

В этой книге рассматриваются только непрерывно дифференцируемые решения.

7. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. Поставим вопрос: каким условиям достаточно подчинить правую часть уравнения (2) в окрестности начальных данных x_0, y_0, чтобы через точку (x_0, y_0) проходила одна и только одна интегральная кривая этого уравнения? В общем виде этот вопрос мы рассматриваем в гл. V, где при некоторых предположениях относительно правой части уравнения (2) мы доказываем существование и единственность решения задачи Коши и показываем, что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами правой части уравнения (2) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для уравнения (2) в упрощенной формулировке.

Теорема. *Пусть дано уравнение* (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

* См. гл. V, п. 154.

** M. A. Lavrentjev. Sûr une equation differentielle du premier ordre. Mathematische Zeitschrift, Bd. 23, 1925, SS 197—209.

и поставлено начальное условие (38),

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ *определена в некоторой замкнутой ограниченной области* (рис. 9)

$$R\colon \quad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

с точкой (x_0, y_0) *внутри* (a *и* b — *заданные положительные числа) и удовлетворяет в ней следующим двум условиям.*

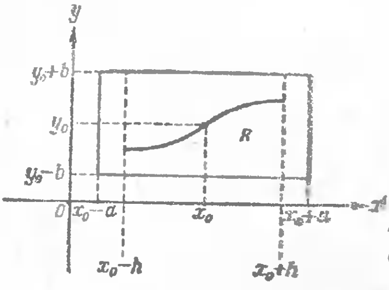


Рис. 9

I. *Функция* $f(x, y)$ *непрерывна и, следовательно, ограничена, т. е.*

$$|f(x, y)| \leqslant M, \tag{41}$$

где M — *постоянное положительное число,* $a(x, y)$ — *любая точка области* R;

II. *Функция* $f(x, y)$ *имеет ограниченную частную производную по аргументу* y, *т. е.:*

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant K, \tag{42}$$

где K — *постоянное положительное число, а* (x, y) — *любая точка области* R.

При этих предположениях уравнение (2) *имеет* ***единственное*** *решение* (36),

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальному условию (38). *Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности начального значения* x_0 *независимой переменной* x, *а именно оно заведомо определено в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{43}$$

где h *есть наименьшее из чисел* a *и* $\frac{b}{M}$,

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{44}$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что *если правая часть уравнения* (2) *есть* ***полином*** *относительно* x *и* y *или любая другая функция, определенная и непрерывная относительно* x *и* y *вместе с частной производной по* y *при всех значениях* x *и* y, *то через любую точку* (x_0, y_0) *проходит одна и только одна интегральная кривая,* ибо во всяком прямоугольнике R с центром в точке (x_0, y_0) оба условия теоремы Пикара будут очевидно выполнены. В этом случае **вся** плоскость (x, y) будет заполнена **не пересекающимися** и **не касающимися друг друга** гладкими интегральными кривыми.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{45}$$

и поставлено начальное условие:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{46}$$

Так как правая часть уравнения (45) есть полином относительно x и y, то решение с любыми начальными условиями, в том числе и с начальным условием (46), существует и единственно.

Оценим область определения решения с начальным условием (46). С этой целью построим прямоугольник R с центром в точке $(0, 0)$,

$$R: \quad |x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \tag{47}$$

причем в качестве a и b можно взять любые положительные числа. Будем иметь:

$$M = a^2 + b^2, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right). \tag{48}$$

Отсюда видно, что h зависит от выбора чисел a и b*. В частности, при $a = b = 1$, получим:

$$h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Поэтому уравнение (45) имеет единственное решение, заведомо определенное в интервале $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ и удовлетворяющее начальному условию (46). это решение непрерывно дифференцируемо.

С геометрической точки зрения полученный результат означает, что уравнение (45) имеет только одну интегральную кривую, проходящую через начало координат, причем эта интегральная кривая гладкая.

Этот результат приобретает особое значение, если принять во внимание, что уравнение (45) не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах от элементарных функций, в чем мы убедимся в п. **51**. Установленный факт существования и единственности решения дает нам основание пытаться искать его другими методами и в том числе находить это решение приближенно.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy), \tag{50}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{51}$$

Так как правая часть уравнения (50) вместе с ее частной производной по y, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$ непрерывна при всех x и y, то через каждую точку плоскости (x, y) проходит единственная интегральная кривая. Это же будет иметь место и в начале координат. Но легко заметить, что $y = 0$ (ось Ox) есть решение уравнения (50) и это решение проходит через начало координат, так что оно и будет искомым решением. В силу только что установленной единственности решения уравнение (50) не имеет других решений, проходящих через начало координат.

---

* Наибольшим значением h будет

$$h_0 = \max_{a,\, b} \min\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вообще, если в уравнении (2) функция $f(x, y)$ удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара в некоторой окрестности заданной точки (x_0, y_0) и такова, что $f(x, y_0) \equiv 0$ вблизи точки $x = x_0$, то единственным решением этого уравнения, проходящим через точку (x_0, y_0), будет прямая $y = y_0$.

8. Общее решение. На примерах, рассмотренных ранее, мы уже видели, что дифференциальное уравнение (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

может иметь бесконечное множество решений. Семейство решений уравнения (2), зависящее от одной произвольной постоянной C:

$$y = \varphi(x, C), \tag{52}$$

называют обычно *общим решением* этого уравнения. Геометрически оно представляет собою семейство интегральных кривых на плоскости (x, y), зависящее от одного параметра C, причем уравнение этого семейства разрешено относительно y. При каждом значении произвольной постоянной (параметра) C (из числа допустимых) формула (52) дает решение (интегральную кривую) уравнения (2).

Формула (52) позволяет, вообще говоря, решать задачу Коши для уравнения (2), т. е. находить решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной C. С этой целью подставляют в формулу (52) вместо x и y числа x_0 и y_0, решают полученное уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ относительно C и подставляют найденное значение $C = C_0$ в формулу (52), в результате чего получают искомое решение в виде $y = \varphi(x, C_0)$.

Однако при этом в общем случае не гарантируется ни разрешимость уравнения $y_0 = \varphi(x_0, C)$ относительно C, ни единственность найденного решения задачи Коши. Чтобы гарантировать и то и другое, нужно наложить на функцию $y = \varphi(x, C)$ некоторые ограничения, при которых формула (52) была бы пригодна для решения задачи Коши с любыми начальными данными x_0, y_0 из некоторой области D изменения переменных x и y, и чтобы это решение было единственным.

Ниже мы дасм определение общего решения уравнения (2) в области D изменения переменных x, y*.

В качестве области D мы будем рассматривать некоторую область на плоскости (x, y), через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (2), так что в каждой точке (x, y) области D имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (2). При этом область D есть либо все множество точек существо-

* Формулировка этого определения общего решения принадлежит Н. П. Еругину.

вания и единственности решения задачи Коши для уравнения (2), либо его часть*.

Функцию

$$y = \varphi(x, C), \tag{53}$$

определенную в некоторой области изменения переменных x и C**, имеющую непрерывную частную производную по независимой переменной x, будем называть *общим решением* уравнения (2) в области D, если равенство (53) разрешимо относительно произвольной постоянной C в области D, так что при любых значениях x и y, принадлежащих области D***, равенством (53) определяется значение C по формуле****:

$$C = \psi(x, y) \tag{54}$$

и, если функция (53) является решением уравнения (2) при всех значениях произвольной постоянной C, доставляемых формулой (54), когда точка (x, y) пробегает область D*****.

Суть этого определения состоит в следующем. Пусть дано семейство кривых F, расположенных в D и зависящих от одного параметра C. Если про каждую кривую из F известно, что она является интегральной кривой уравнения (2) и все кривые из F в их совокупности покрывают D, то F есть общее решение уравнения (2) в области D.

Формула общего решения (53) дает возможность за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной C решить любую задачу Коши для уравнения (2) в области D, т. е. найти решение уравнения (2), определяемое начальными данными x_0, y_0, причем (x_0, y_0) — любая точка области D.

Для нахождения этого решения поступаем, как указано выше. Подставим в формулу (53) вместо x и y начальные данные x_0 и y_0:

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{55}$$

Найдем отсюда

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0. \tag{56}$$

---

* Может случиться, что множество точек существования и единственности для уравнения (2) распадается на несколько областей, в каждой из которых уравнение (2) имеет свое общее решение.

** Мы предполагаем, что множество S точек (x, C), на котором определена функция (53), таково, что любое *сечение* $C = C_0 = \mathrm{const}$ этого множества, т. е. совокупность всех x таких, что точка (x, C_0) принадлежит S, представляет собою некоторый интервал оси Ox.

*** Т. е. во всякой точке (x, y), лежащей внутри области D, но не на ее границе.

**** $C = \psi(x, y)$, вообще говоря, — многозначная функция.

***** При этом в качестве C мы допускаем и несобственные числа $\pm\infty$.

Подставим это значение C в формулу (53). Получим:

$$y = \varphi(x,\ C_0). \tag{57}$$

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными x_0, y_0 нет.

Иногда в формуле общего решения (53) роль произвольной постоянной C играет начальное значение y_0 искомой функции y при некотором фиксированном значении x_0 аргумента x, так что формула (53) принимает следующий вид:

$$y = y(x,\ x_0,\ y_0). \tag{57'}$$

Такая форма записи общего решения называется *общим решением в форме Коши.*

Пример. Рассмотрим уравнение (30),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Покажем, что

$$y = Cx\ (x \neq 0) \tag{58}$$

является общим решением уравнения (30) в области

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \tag{59}$$

Прежде всего, легко видеть, что в области (59) имеет место существование и единственность решения задачи Коши*. Далее, уравнение (58) разрешимо в области (59) относительно C:

$$C = \frac{y}{x}. \tag{60}$$

Наконец, очевидно, что функция (58) является решением уравнения (30) при всех значениях C, доставляемых формулой (60), когда точка $(x,\ y)$ пробегает область (59). Следовательно, (58) есть общее решение уравнения (30) в области (59).

Найдем решение уравнения (30), удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (x_0 > 0). \tag{61}$$

Полагая в общем решении (58) $x = x_0$, $y = y_0$, имеем

$$y_0 = Cx_0, \tag{62}$$

откуда

$$C = \frac{y_0}{x_0} \equiv C_0. \tag{63}$$

Подставляя это значение C в общее решение (58), находим

$$y = \frac{y_0}{x_0}x. \tag{64}$$

---

* Это следует из того, что правая часть уравнения (30) непрерывна относительно x и y в области (59) и в окрестности каждой точки $(x,\ y)$ из этой области ее частная производная по y ограничена.

Это и есть искомое решение. Других решений, удовлетворяющих поставленному начальному условию, нет.

Заметим, что функция (64) будет общим решением уравнения (30) в форме Коши в области (59), если рассматривать в ней y_0 как произвольную постоянную.

9. Общий интеграл. Общее решение в параметрической форме. В большинстве случаев, интегрируя уравнение (2), мы получаем общее решение (однопараметрическое семейство интегральных кривых) в неявном виде (в виде, не разрешенном относительно y):

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{65}$$

или

$$\psi(x, y) = C. \tag{65'}$$

Такая форма общего решения уравнения (2) называется обычно *общим интегралом* этого уравнения.

Будем называть соотношение (65) или (65′) *общим решением в неявной форме* или *общим интегралом* уравнения (2) в области D, если это соотношение определяет общее решение (53),

$$y = \varphi(x, C),$$

уравнения (2) в области D.

Из этого определения следует, что (54) есть общий интеграл уравнения (2) в области D.

Пример. Рассмотрим уравнение (34),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Мы уже знаем [4], что интегральными кривыми этого уравнения являются окружности

$$x^2 + y^2 = C \qquad (C = R^2), \tag{66}$$

причем через каждую точку плоскости (x, y), кроме начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (34). Соотношение (66) является общим интегралом уравнения (34). Оно будет общим интегралом в каждой из полуплоскостей. В самом деле, соотношение (66) определяет общие решения вида $y = \varphi(x, C)$ в каждой из этих областей, а именно

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

— общее решение в верхней полуплоскости ($y > 0$), и

$$y = -\sqrt{C - x^2}$$

— общее решение в нижней полуплоскости ($y < 0$).

Иногда, интегрируя дифференциальное уравнение (2), получают семейство интегральных кривых, зависящее от одной произвольной постоянной C, в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, C), \\ y &= \psi(t, C). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением* уравнения (2) *в параметрической форме.*

Если из уравнений (67) удается исключить параметр t, то получают общее решение в неявном или даже в явном виде.

Пример. Уравнение (34).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

имеет следующее общее решение в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= C\cos t, \\ y &= C\sin t. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Исключая параметр t, получим общий интеграл:

$$x^2 + y^2 = C^2. \tag{69}$$

10. Частное решение. Если решение уравнения (2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этого уравнения, то такое решение мы будем называть *частным решением.*

Решение, получающееся из формулы общего решения (53) при частном числовом значении произвольной постоянной C, включая $\pm\infty$, является, очевидно, частным решением. При этом, если множество D, на котором определено рассматриваемое общее решение, не совпадает со всем множеством точек существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (2), то формула этого общего решения содержит в себе не все частные решения уравнения (2), а только их часть. Остальные частные решения включены в формулы других общих решений уравнения (2).

Решение, определяемое теоремой Пикара, является частным решением, ибо в каждой точке этого решения имеет место единственность решения задачи Коши для данного уравнения.

Решая задачу Коши при помощи формулы общего решения (53) с начальными данными из области D, мы всегда получаем частное решение, так что решение (57) есть частное.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = 2x. \tag{70}$$

Очевидно, что

$$y = x^2 + C \tag{71}$$

есть общее решение этого уравнения в области

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

т. е. на всей плоскости (x, y).

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Полагая в (71) $x = x_0$, $y = y_0$, имеем: $y_0 = x_0^2 + C$, откуда $C = y_0 - x_0^2$. Подставляя это значение C в общее решение (71), получаем:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2. \tag{72}$$

Это и есть искомое решение. Оно является частным решением.

11. Особое решение. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, будем называть *особым решением.*

Геометрически особому решению соответствует интегральная кривая, не содержащаяся в семействе интегральных кривых, составляющих общее решение (общий интеграл). Поэтому особое решение не может лежать внутри области D существования общего решения.

Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения (общего интеграла) ни при каком числовом значении произвольной постоянной C, включая $\pm\infty$. Оно может получаться из формулы общего решения, определенного в области D, лишь при замене C на некоторую функцию от x, $C = C(x)$*.

Заметим, что существуют решения, которые не являются ни частными, ни особыми. В частности, если уравнение имеет частные и особые решения, то упомянутые выше решения можно получить, склеивая куски частных и особых решений и т. д. В дальнейшем на решениях, получающихся через склейку, мы не задерживаем внимания читателя.

Пример. Возьмем уравнение

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y \geqslant 0). \tag{73}$$

Здесь радикал берется с положительным знаком. Считая, что $y \neq 0$, делим обе части уравнения на $2\sqrt{y}$. Получаем:

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \quad \text{или} \quad (\sqrt{y})' = 1.$$

Отсюда:

$$\sqrt{y} = x + C,$$

где $x > -C$, так как $x + C > 0$. Следовательно, уравнение (73) имеет семейство решений

$$y = (x + C)^2, \quad x \geqslant -C. \tag{74}$$

(Здесь мы в неравенстве $x > C$ присоединили знак равенства, ибо функция (74) обращает уравнение (73) в тождество, которое имеет место и при $x = -C$). Это — правые ветви парабол, у которых ось симметрии па-

---

* Это надо понимать в том смысле, что если мы разрешим формулу общего решения (53) относительно C, то функция $C = \psi(x, y)$ стремится к функции $C(x)$, когда точка (x, y) стремится изнутри D к точке $(x, y(x))$, лежащей на особом решении $y = y(x)$, если последнее представляет собою границу области D (см. приведенный ниже пример).

раллельна оси Oy, а вершины находятся на оси Ox (рис. 10). Тот факт, что левые ветви парабол не являются интегральными кривыми, очевиден и из самого дифференциального уравнения (73), ибо вдоль них касательная образует тупой угол с осью Ox, так что производная y' отрицательна, тогда как в уравнении (73) она предполагается неотрицательной. (Левые ветви являются интегральными кривыми уравнения $y' = -2\sqrt{y}$).

Покажем, что функция

$$y = (x + C)^2 \quad (x > -C) \tag{75}$$

является **общим решением** уравнения (73) в области D:

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty, \tag{76}$$

т. е. в верхней полуплоскости.

В самом деле, прежде всего убедимся, что в области (76) имеет место существование и единственность решения задачи Коши. Это следует из того, что для любой точки (x_0, y_0) из области (76) можно построить замкнутую окрестность вида

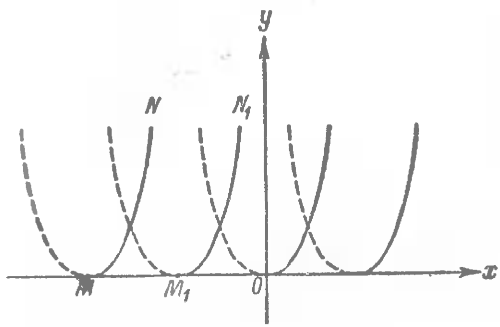


Рис. 10

$$R: |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b,$$

лежащую в верхней полуплоскости. В этой окрестности правая часть уравнения (73) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара. Действительно, функция $f(x, y) \equiv 2\sqrt{y}$ непрерывна, а $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ ограничена. Поэтому через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (73).

Проверим теперь, что функция (75) удовлетворяет обоим требованиям, содержащимся в определении общего решения, данном в п. 8.

1) Равенство (75) разрешимо в области (76) относительно произвольной постоянной C:

$$C = \sqrt{y} - x.$$

2) Подставляя (75) в (73), получаем тождество

$$2(x + C) \equiv 2\sqrt{(x + C)^2} \quad (x + C > 0),$$

так что функция (75) является решением уравнения (73) при всех значениях C.

Поэтому функция (75) является общим решением уравнения (73) в области (76).

Очевидно, что решением уравнения (73) будет также $y \equiv 0$ (ось Ox). Это решение **особое**, так как во всех точках его нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, через любую точку $M(x_0, 0)$, лежащую на оси Ox, проходит само решение $y \equiv 0$, примыкающая к ней полупарабола

$$MN: y = (x - x_0)^2 \ (x \geqslant x_0)$$

(она содержится в семействе (74) при $C = -x_0$) и, кроме того, бесчисленное множество решений типа MM_1N_1, которые можно составить из отрезков MM_1 особого решения $y \equiv 0$ $[M_1 = M_1(x_1, 0)]$ и частных решений — полупарабол

$$M_1N_1: y = (x - x_1)^2 \ (x > x_1).$$

Отметим, что решения типа MM_1N_1 не являются ни частными, ни особыми.

Рассматривая поле направлений, определяемое уравнением (73), видим, что через каждую точку $M(x_0, 0)$, лежащую на особом решении $y \equiv 0$, проходит не о д н а интегральная кривая, в то время как направление поля в этой точке только о д н о:

$$y' \mid_{(x_0,\, 0)} = 2\sqrt{y} \mid_{(x_0,\, 0)} = 0.$$

Заметим еще, что особое решение $y = 0$ не содержится в формуле общего решения (75), т. е. не получается из нее ни при каком частном ч и с л о в о м значении произвольной постоянной C, но оно является г р а н и ц е й области задания общего решения (75) и получается из ф о р м у л ы этого общего решения при $C = -x^*$.

Ниже мы указываем способы нахождения особых решений или хотя бы кривых, «подозрительных» на особое решение.

12. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение по дифференциальному уравнению. Предположим, что правая часть уравнения (2),

$$y' = f(x, y),$$

определена и непрерывна в некоторой области D и имеет в каждой точке этой области производную по y. Тогда, если $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничена в области D, то, согласно теореме Пикара, через каждую точку этой области проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (2) и, следовательно, уравнение (2) не имеет особых решений. Поэтому, при сделанных предположениях, особые решения уравнения (2) нужно искать только среди тех кривых, вдоль которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ не ограничена.

Будем называть кривые, вдоль которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ не ограничена, *кривыми, подозрительными на особое решение.* Найдя кривую, подозрительную на особое решение, нужно, во-первых, проверить, что она вообще является интегральной кривой, и, во-вторых, убедиться, что в каждой точке ее нарушается единственность решения. Если и то и другое имеет место, то кривая, подозрительная на особое решение, действительно будет особым решением.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (73),

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}.$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, так что $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ только при $y \equiv 0$.

Поэтому кривой, подозрительной на особое решение, является только ось $Ox(y \equiv 0)$. Легко убедиться, что $y \equiv 0$ является решением уравнения (73) и притом о с о б ы м**.

---

* См. сноску на стр. 41.

** См. п. 11.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} + 1 \tag{73'}$$

Здесь, так же как и в примере 1, единственной кривой, подозрительной на особое решение, является ось Ox. Но она даже не есть решение. Следовательно, уравнение (73′) не имеет особых решений.

13. Отсутствие особых решений у уравнения первого порядка с правой частью, рациональной относительно y. Заметим, что в примерах предыдущего пункта правые части рассматриваемых уравнений иррациональны относительно y.

Рассмотрим случай уравнения (2), в котором правая часть $f(x, y)$ — целая рациональная функция относительно y:

$$\frac{dy}{dx} = A_0(x)\, y^n + A_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)\, y + A_n(x). \tag{77}$$

Предположим, что в уравнении (77) коэффициенты $A_i(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Тогда в прямоугольнике

$$R:\ a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \quad -k \leqslant y \leqslant k \quad (a_1 > a,\ b_1 < b),$$

где a_1 и b_1 — числа сколь угодно близкие к a и b, а число k — сколь угодно большое, правая часть уравнения (77) непрерывная и, кроме того, $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена, так что выполнены оба условия теоремы Пикара. Следовательно, уравнение (77) не имеет особых решений.

Пример. Уравнение (45),

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

не имеет особых решений, ибо его правая часть есть полином относительно x и y.

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{78}$$

где P и Q — целые рациональные функции относительно y с непрерывными относительно x коэффициентами (например, P и Q — полиномы относительно x и y). При этом мы предполагаем правую часть уравнения (78) *неприводимой*, т. е. считаем, что все возможные сокращения на общие множители уже выполнены.

Здесь $\frac{\partial f}{\partial y}$ может быть неограниченной лишь в точках (x_0, y_0), где $Q(x_0, y_0) = 0$.

Будем различать два случая.

1°. $P(x_0, y_0) \neq 0$. В этом случае правая часть перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{78'}$$

удовлетворяет в окрестности точки (x_0, y_0) обоим условиям теоремы Пикара. Следовательно, уравнение (78) имеет единственное решение $x = x(y)$, проходящее через точку (x_0, y_0). Это решение — частное.

2°. $P(x_0, y_0) = 0$. В этом случае правая часть уравнения (78) становится в точке (x_0, y_0) неопределенной. Будем считать, что P и Q — полиномы относительно x и y. Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) нет точек, отличных от этой точки, в которых P и Q одновременно обращались бы в нуль и, следовательно, через каждую точку этой окрестности, отличную от самой точки (x_0, y_0), проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (78) или (78′), так что и в этом случае особых решений нет.

Итак, *ни в случае* 1°, *ни в случае* 2° *мы не получаем особых решений.*

В частности, уравнение с дробно-линейной однородной правой частью,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{79}$$

не имеет особых решений.

14. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение. Предположим, что уравнение (2) допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых

$$\Phi(x, y, C), \tag{80}$$

где C — параметр. Предположим, что оно имеет *огибающую*, т. е. такую кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства (80) и ни на каком участке не совпадает ни с одной из кривых этого семейства*.

Очевидно, что *огибающая семейства интегральных кривых уравнения* (2) *представляет собою решение этого уравнения и притом особое.*

В самом деле, в каждой своей точке огибающая имеет общую касательную с некоторой интегральной кривой семейства (80) и, следовательно, в каждой точке огибающей направление касательной совпадает с направлением поля в этой точке. Это и означает, что огибающая является интегральной кривой. Далее, в каждой точке огибающей нарушается единственность решения задачи Коши: через эту точку проходят по крайней мере две интегральные кривые (а именно сама огибаю-

* Огибающая может касаться не всех кривых семейства. Желая подчеркнуть это, мы иногда говорим об огибающей соответствующей части семейства.

щая и кривая семейства, которой огибающая касается в этой точке), тогда как направление поля в ней одно.

Пример 1. Уравнение (73),

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y},$$

допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых (74),

$$y = (x + C)^2 \quad (x \geqslant -C).$$

Из рис. 10 ясно, что это семейство имеет огибающую $y = 0$ (ось Ox), которая представляет собою особое решение уравнения (73).

Ниже мы сформулируем теорему о необходимом условии, которому должна удовлетворять огибающая однопараметрического семейства кривых и одну теорему о достаточном условии*. Для этого нам потребуется наложить некоторые ограничения как на характер семейства кривых, так и на огибающую.

Предположим, что однопараметрическое семейство (80) таково, что функция $\Phi(x, y, C)$ задана и имеет непрерывные частные производные по x, y, C во всех точках (x, y) из некоторой области G и при всех значениях C из интервала $[C_1, C_2]$ и что при каждом C из $[C_1, C_2]$ уравнение (80) определяет некоторую кривую. Тогда мы будем говорить, что уравнение (80) определяет в области G *регулярное семейство кривых*, зависящих от параметра C из $[C_1, C_2]$.

Будем говорить, что кривая γ задана в *гладкой параметризации*, если она задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{81}$$

в которых функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные и эти производные не обращаются одновременно в нуль ни при одном значении t из $[\alpha, \beta]$.

Предположим, что огибающая семейства (80) есть кривая в гладкой параметризации.

Теорема 1 (необходимое условие огибающей). *Пусть кривая* (81) *есть огибающая регулярного семейства (80). Тогда, если при $t = t_0$ из $[\alpha, \beta]$ она касается кривой*

$$\Phi(x, y, C_0) = 0 \quad (C_0 \in [C_1, C_2]) \tag{82}$$

семейства (80), *то числа x_0, y_0 и C_0, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, удовлетворяют системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

---

* См.: Т. Б. Беляева и В. А. Залгаллер. Об изложении теории огибающих (Методическая заметка). УМН, т. XVIII, вып. 5 (113), 1963.

Совокупность точек (x, y) из G, которые хотя бы при одном C из $[C_1, C_2]$ удовлетворяют системе (83), называется *дискриминантной кривой семейства* (80).

Из теоремы 1 следует, что *огибающая является дискриминантной кривой или ее частью.* Но дискриминантная кривая может содержать и точки, отличные от огибающей.

Во многих случаях из чисто геометрических соображений можно установить, будет ли дискриминантная кривая (или ее часть) огибающей семейства (80).

Теорема 2 (достаточный признак огибающей). *Пусть семейство* (80) *есть регулярное семейство и указана кривая* γ, *заданная уравнениями (81) и функция* $C = C(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, *причем величины* $x(t)$, $y(t)$, $C(t)$ *при всех* t *из* $[\alpha, \beta]$ *тождественно удовлетворяют системе* (83). *Если при этом:*

1) *кривая* γ *задана в гладкой параметризации;*

2) *функция* $C(t)$ *имеет непрерывную производную, не равную тождественно нулю, ни на каком участке из* $[\alpha, \beta]$;

$$3) \quad |\Phi'_x[x(t), y(t), C(t)]| + |\Phi'_y[x(t), y(t), C(t)]| \neq 0,$$

то кривая γ *есть огибающая семейства* (80).

Отметим два частных случая этой теоремы.

Замечание 1. *Предположим, что система* (83) *определяет* y *и* C *как функции от* x:

$$y = y(x), \quad C = C(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{84}$$

причем $y'(x)$ *и* $C'(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$ *и, кроме того,* $C'(x)$ *не обращается в нуль в* $[a, b]$. *Тогда* $y = y(x)$ *есть дискриминантная кривая. Принимая* x *за параметр, мы можем записать ее в виде*

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ x &= x. \end{aligned}\right\} \tag{81$'$}$$

Очевидно (81′) есть *кривая в гладкой параметризации,* ибо правые части непрерывны вместе с производными по параметру (т. е. по x) и, кроме того, $x'_x = 1$, так что *первое условие теоремы 2 выполнено.*

Величина C *как функция параметра* x (в силу сделанного предположения), *удовлетворяет второму условию теоремы 2.*

Третье условие принимает вид

$$|\Phi'_x[x, y(x), C(x)]| + |\Phi'_y[x, y(x), C(x)]| \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Если это условие выполнено, то кривая $y = y(x)$ *будет огибающей семейства (80).*

Замечание 2. *В тех случаях, когда из системы* (83) *не удается найти* y *и* C *как функции от* x, *но зато удается выразить*

x и y через C, мы получаем дискриминантную кривую в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(C), \\ y &= y(C), \end{aligned}\right\} \tag{81''}$$

где C — параметр. Если функции $x(C)$ и $y(C)$ имеют непрерывные производные и если $|x'(C)| + |y'(C)| \neq 0$ в интервале $[C_1, C_2]$, то кривая (81″) есть кривая в гладкой параметризации. Тем самым первое условие теоремы 2 выполнено. Далее мы имеем: $C'_C = 1 \neq 0$, так что второе условие этой теоремы тоже выполнено.

Третье условие принимает вид:

$$|C'_C[x(C),\ y(C),\ C]| + |\Phi'_y[x(C),\ y(C),\ C]| \neq 0 \ (C_1 \leqslant C \leqslant C_2). \tag{85}$$

Если это условие выполнено, то кривая (81″) (при сделанных предположениях) будет огибающей семейства (80).

Пример 2. Найдем огибающую семейства:

$$y = xC + \sqrt{1 - C^2} \quad (-1 < C < 1). \tag{86}$$

Это семейство регулярно на всей плоскости (x, y) при всех значениях параметра C из интервала $(-1, +1)$.

Составляя систему (83), имеем:

$$\left.\begin{aligned} y &= xC + \sqrt{1 - C^2}, \\ 0 &= x - \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}. \end{aligned}\right\}$$

Дискриминантной кривой будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Здесь C — параметр. Кривая (87) есть кривая в гладкой параметризации, ибо x'_C и y'_C непрерывны и $x'_C \neq 0$.

Условие (85), очевидно, выполнено, ибо $\Phi'_y \equiv 1 \neq 0$. Следовательно, кривая (87) есть о г и б а ю щ а я семейства (86). Исключая из уравнений (87) параметр C, получаем уравнение огибающей в явном виде:

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{3}{5}\ y^{-\frac{2}{3}}. \tag{88}$$

Переписав его в виде

$$\frac{5}{3}\ y^{\frac{2}{3}} y' = 1 \quad \text{или} \quad \left(y^{\frac{5}{3}}\right)' = 1,$$

получим семейство интегральных кривых

$$y^{\frac{5}{3}} = x + C \quad \text{или} \quad y^5 - (x + C)^3 = 0.$$

Найдем дискриминантную кривую. Имеем

$$\left.\begin{aligned} y^5-(x+C)^3=0, \\ -3(x+C)^2=0, \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

откуда $x=-C$, $y=0$. Очевидно, что дискриминантная кривая $y=0$ не является огибающей. Условие (85) не выполняется.

15. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение в процессе построения общего решения (общего интеграла). Если в процессе интегрирования того или иного дифференциального уравнения мы делим обе его части на некоторую функцию $\omega(x, y)$, то мы получаем уравнение, вообще говоря, не равносильное данному, ибо мы можем при этом потерять решения вида $y=y(x)$ или $x=x(y)$, при которых делитель $\omega(x, y)$ обращается в нуль, если эти решения не содержатся в общем решении, т. е. не получаются из него ни при каких числовых значениях произвольной постоянной, включая $\pm\infty$. Решения, о которых идет речь, очевидно, являются особыми.

Например, в п. **11**, интегрируя уравнение $y'=2\sqrt{y}$, мы потеряли особое решение $y=0$, когда делили это уравнение на функцию $2\sqrt{y}$, которая обращается в нуль как раз при $y=0$.

16. Понятие об интеграле дифференциального уравнения. Введем еще одно понятие, которое играет существенную роль как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в теории уравнений с частными производными. Это понятие об интеграле дифференциального уравнения.

Предположим, что интегрируя данное дифференциальное уравнение, мы получаем общий интеграл в виде, разрешенном относительно произвольной постоянной C:

$$\psi(x, y)=C. \tag{90}$$

Тогда левую часть равенства (90) называют обычно *интегралом* данного дифференциального уравнения.

Если общий интеграл получается в виде

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{91}$$

то для нахождения интеграла нужно разрешить уравнение (91) относительно C. Предполагая, что последнее возможно, мы будем говорить, что уравнение (91) определяет интеграл данного дифференциального уравнения в неявной форме.

Наконец, если мы знаем общее решение

$$y=\varphi(x, C), \tag{92}$$

то для нахождения интеграла поступаем аналогично.

Ниже мы даем два определения интеграла дифференциального уравнения (2)

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Пусть D есть область, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (2) и

$$y = \varphi(x, C) \tag{93}$$

есть общее решение* этого уравнения в области D. Тогда равенство (93) разрешимо в D относительно C:

$$\psi(x, y) = C. \tag{94}$$

Функция $\psi(x, y)$ не приводится к постоянной, т. е. она не обращается тождественно в постоянную ни в области D, ни в какой части этой области.

Отметим одно свойство функции $\psi(x, y)$, стоящей в левой части равенства (94). Функция $\psi(x, y)$ обращается в постоянную при замене y любым частным решением, расположенным в области задания общего решения (93), причем значение этой постоянной определяется выбранным частным решением, т. е. мы имеем тождество (относительно x):

$$\psi[x, \varphi(x, C)] = C. \tag{95}$$

Всякую функцию $\psi(x, y)$, обладающую указанным свойством, будем называть *интегралом* уравнения (2) в области D.

Первое определение интеграла. Функция $\psi(x, y)$, определенная в области D и не приводящаяся к постоянной, называется *интегралом* уравнения (2) в области D, если при замене y любым частным решением этого уравнения, расположенным в области D, она обращается в постоянную.

Предположим теперь, что функция $\psi(x, y)$, будучи интегралом уравнения (2), имеет непрерывные частные производные по x и y. Тогда вследствие того, что она вдоль любого частного решения обращается в постоянную, ее полный дифференциал $d\psi$ должен обращаться тождественно (относительно x) в нуль вдоль этого решения, т. е.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy \equiv 0 \tag{96}$$

вдоль любого частного решения. Но вдоль решения мы имеем

$$dy \equiv f(x, y)\, dx. \tag{97}$$

Поэтому предыдущее тождество можно переписать так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, f(x, y)\, dx \equiv 0. \tag{98}$$

Это тождество должно выполняться во всех точках области D.

---

* Здесь, как и везде, мы пользуемся определением общего решения в области D, данным в п. 8.

Таким образом, если интеграл $\psi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то он обладает тем свойством, что его полный дифференциал обращается в нуль в силу уравнения (2), т. е. при замене dy его значением из уравнения (2). При этом $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ должна быть отлична от нуля в области D, ибо из (98) следует, что в точке (x, y) из D, в которой $\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$, будет и $\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$, так что в этой точке поле, определяемое уравнением (2), не задано.

Второе определение интеграла. Функция $\psi(x, y)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными по x и y в области D и такая, что $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в области D, называется *интегралом* уравнения (2) в области D, если ее полный дифференциал тождественно в D равен нулю в силу этого уравнения.

Деля обе части тождества (98) на dx, получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,f(x, y)\equiv 0. \tag{99}$$

Левая часть этого тождества есть результат замены в выражении полной частной производной от функции ψ по x,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}, \tag{100}$$

производной $\frac{dy}{dx}$ ее значением из уравнения (2).

Таким образом, если $\psi(x, y)$ есть интеграл уравнения (2), то его полная частная производная по x тождественно (в D) равна нулю в силу уравнения (2), т. е. при замене y' правой частью этого уравнения.

Ясно, что функция $\psi(x, y)$, являющаяся интегралом в смысле второго определения, будет интегралом и в смысле первого определения.

Обратное неверно, ибо функция $\psi(x, y)$, являющаяся интегралом в смысле первого определения, может не иметь частных производных по x и y.

Доказательство существования интеграла уравнения (2) при соответствующих предположениях относительно правой части этого уравнения дается в пятой главе*.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{101}$$

---

* См. п. 138.

Покажем, что функция

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 \tag{102}$$

является интегралом уравнения (101).

Существование и единственность решения задачи Коши гарантированы во всякой точке (x, y), ордината которой отлична от 0, т. е. в верхней и нижней полуплоскостях. Возьмем, например, верхнюю полуплоскость.

В ней функция $\psi(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными, причем $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$ отлична от нуля.

Далее имеем:

$$d\psi = 2x\,dx + 2y\,dy. \tag{103}$$

Подставляя в правую часть вместо dy его значение из уравнения (101), получим:

$$d\psi|_{(101)} = 2x\,dx + 2y\left(-\frac{x}{y}\right)dx \equiv 0. \tag{104}$$

Следовательно, функция (102) есть интеграл уравнения (101) в верхней полуплоскости.

Аналогично убеждаемся, что она является интегралом уравнения (101) и в нижней полуплоскости.

Покажем, что если уравнение (2) имеет один интеграл, то он имеет и бесчисленное множество интегралов. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если $\psi_1(x, y)$ есть интеграл уравнения (2) в области D, имеющий непрерывные частные производные по x и y, а $\Phi(z)$ любая функция, определенная в некоторой области изменения z, охватывающей все значения, принимаемые функцией $\psi_1(x, y)$ (когда точка (x, y) пробегает всю область D), и имеющая в этой области непрерывную производную, отличную от нуля, то функция*

$$\psi = \Phi[\psi_1(x, y)] \tag{105}$$

тоже будет интегралом уравнения (2) в области D.

В самом деле, функция ψ имеет непрерывные частные производные по x и y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \tag{106}$$

причем $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ в D. Далее имеем:

$$d\psi = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\,d\psi_1. \tag{107}$$

Так как $d\psi_1 \equiv 0$ в силу уравнения (2), то и $d\psi \equiv 0$ в силу этого уравнения. Следовательно, ψ есть интеграл уравнения (2) в области D.

Замечание 1. *Если $\Phi'(z)$ отлична от нуля не при всех z из указанной в теореме области, а лишь в ее части, то функция (105) будет интегралом уравнения (2) в соответствующей части области D.*

З а м е ч а н и е 2. Из доказанной теоремы следует, что *если*

$$\psi_1(x, y) = C_1 \tag{108}$$

есть общий интеграл уравнения (2), то соотношение

$$\Phi[\psi_1(x, y)] = C \quad [C = \Phi(C_1)], \tag{109}$$

где $\Phi(z)$—любая функция, имеющая непрерывную производную, отличную от нуля, тоже является общим интегралом уравнения (2).

Это утверждение позволяет получать общий интеграл данного уравнения в наиболее удобном виде за счет надлежащего выбора функции Φ.

Пример 2. Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{110}$$

Это уравнение имеет, как нетрудно убедиться, следующий общий интеграл:

$$\psi_1 \equiv \arcsin x + \arcsin y = C_1. \tag{111}$$

Его левая часть есть трансцендентная функция.

Построим общий интеграл в а л г е б р а и ч е с к о м виде. Для этого возьмем в качестве функции $\Phi(z)$, о которой шла речь выше, синус. Тогда получим общий интеграл в виде

$$\psi \equiv \sin(\arcsin x + \arcsin y) = C \tag{112}$$

или

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C, \tag{113}$$

т. е. мы получили общий интеграл в алгебраическом виде. Этот вид общего интеграла во многих отношениях более удобен, чем предыдущий. В частности, освобождаясь от радикалов, мы можем получить отсюда общий интеграл в р а ц и о н а л ь н о м виде.

Данное выше понятие об интеграле уравнения (2) легко переносится на уравнение в дифференциальной форме (4),

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

и на уравнение в симметрической форме (6),

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Остановимся на интеграле, имеющем непрерывные частные производные.

Так как уравнение (4) равносильно совокупности уравнений (5),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)},$$

то мы будем называть функцию $\psi(x, y)$ *интегралом* уравнения (4) в области D, где D есть область существования и единственности решения задачи Коши для этого уравнения, если частные производные $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ существуют и непрерывны в D, не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке области D и если полный дифференциал функции $\psi(x, y)$ тождественно (в D) равен нулю в силу уравнения (4).

В случае, когда дифференциальное уравнение задано в симметрической форме (6), понятие интеграла вводится аналогично, причем предполагается, что в рассматриваемой области функции X и Y не обращаются одновременно в нуль.

17. Теорема о зависимости любых двух интегралов одного и того же уравнения. В этом пункте мы докажем, что всякие два интеграла уравнения (2), определенные в одной и той же области, зависимы между собою. Напомним сначала понятие о зависимости двух функций*.

Пусть даны две функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определенные и непрерывные, вместе со своими частными производными, в некоторой области D. Если функция $f(x, y)$ является функцией от функции $g(x, y)$, так что имеет место равенство

$$f = \Phi(g) \tag{114}$$

при всех значениях x, y из области D, причем $\Phi(z)$ есть непрерывная функция от z, имеющая непрерывную производную при всех значениях, которые принимает функция $g(x, y)$, когда точка (x, y) пробегает область D, то говорят, что в области D функция f *зависит* от функции g. Функции f и g называют вообще *зависимыми* в области D, если f зависит от g или g зависит от f.

Пример 1. Две функции

$$f_1 = \ln x + \ln y, \qquad g_1 = xy \tag{115}$$

зависимы в области $x>0$, $y>0$ (первый квадрант), а именно:

$$f_1 = \ln g_1. \tag{116}$$

Для доказательства указанного выше основного утверждения настоящего пункта нам понадобится следующая лемма.

Лемма**. *Пусть даны две функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определенные и непрерывные, вместе со своими частными производными, в области D. Предположим, что определитель*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{117}$$

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 201.

** См. там же, стр. 203.

называемый определителем Якоби или якобианом, тождественно равен нулю в области D, но

$$g_x'^2(x_0, y_0) + g_y'^2(x_0, y_0) \neq 0, \tag{118}$$

где (x_0, y_0) некоторая точка этой области. Тогда f есть функция от g в некоторой окрестности D_0 точки (x_0, y_0), т. е. при всех значениях x, y из D_0 выполняется равенство

$$f = \Phi(g). \tag{119}$$

Пример 2. Рассмотрим снова функции (115),

$$f_1 = \ln x + \ln y, \quad g_1 = xy \quad (x > 0, \ y > 0).$$

Составим их якобиан:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}. \tag{120}$$

Он тождественно равен нулю. Но в рассматриваемой области имеем

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = y \neq 0, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = x \neq 0.$$

В качестве точки (x_0, y_0) можно взять любую точку из первого квадранта. Возьмем, например, точку (1, 1). Согласно лемме функция f_1 будет функцией от g_1 в некоторой окрестности взятой точки, т. е. в этой окрестности мы имеем:

$$f_1 = \Phi(g_1). \tag{121}$$

Найдем вид функции Φ. Имеем:

$$\ln x + \ln y = \Phi(xy).$$

Положим $y = 1$. Получим $\ln x = \Phi(x)$. Следовательно, в качестве Φ нужно взять логарифм, так что

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \quad \text{или} \quad f_1 = \ln g_1.$$

Полученное равенство выполняется согласно лемме в некоторой окрестности точки (1, 1). На деле, как уже сказано в примере 1, оно выполняется при всех x, y из первого квадранта, так что f_1 является функцией g_1 во всем первом квадранте.

Докажем теперь, что любые два интеграла уравнения (2) зависимы, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *Любые два интеграла $\psi(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ уравнения (2), определенные в одной и той же области D, зависимы в некоторой области D_0, содержащейся внутри области D, т. е. тождественно (в D_0) выполняется равенство*

$$\psi = \Phi(\psi_1). \tag{122}$$

Действительно, так как $\psi(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ суть интегралы уравнения (2) в области D, то согласно определению (в D) имеют место тождества:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}\,f(x,\ y)\,dx\equiv 0,\\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\,f(x,\ y)\,dx\equiv 0.\end{aligned}\right\}\tag{123}$$

Но тогда (в D) имеет место тождество

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y}\\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv 0\tag{124}$$

(почему?).

Таким образом, якобиан функций ψ и ψ_1 тождественно (в D) равен нулю.

Отсюда, принимая во внимание, что $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ отлична от нуля во всякой точке $(x_0,\ y_0)$ из области D, мы, в силу приведенной выше леммы, заключаем, что ψ есть функция от ψ_1 в некоторой окрестности D_0 точки $(x_0,\ y_0)$, т. е. тождественно (в D_0) выполняется равенство (122). Теорема доказана.

Заметим еще, что в равенстве (122) функция Φ имеет непрерывную производную по ψ_1 при всех значениях, принимаемых функцией ψ_1, когда точка $(x,\ y)$ пробегает область D_0. Кроме того, $\frac{d\Phi}{d\psi_1}$ отлична от нуля, ибо, если $\frac{d\Phi}{d\psi_1}=0$, то $\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}=0$, т. е. $\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$, что невозможно, так как ψ есть интеграл уравнения (2).

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что зависимость между любыми двумя интегралами, определенными в одной и той же области, имеет место и для уравнений вида (4) и (6).

18. Замечание об интегрируемости в квадратурах. Желая иметь решения в форме, наиболее удобной для изучения их свойств и для вычисления значений искомой функции, стараются во всех случаях, когда это возможно, проинтегрировать уравнение в квадратурах.

Решение вопроса об интегрируемости в квадратурах уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),$$

зависит от вида функции $f(x, y)$. В общем случае уравнение (2) не интегрируется в квадратурах. Однако при некоторых частных видах функции $f(x, y)$ его удается проинтегрировать в квадратурах. Следующие параграфы этой главы и посвящены рассмотрению наиболее важных типов уравнений.

Заметим, что, рассматривая уравнение в виде (2), мы тем самым считаем, что y есть искомая функция. Но часто случается, что заданное уравнение вида (2) не принадлежит ни к какому из известных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах, в то время как оно является таковым, если считать искомой функцией не y, а x, т. е. переписать заданное уравнение в виде (2′),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Если заданное уравнение имеет вид (4),

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

то его всегда можно привести к виду (2) или (2′), разрешая его относительно $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$. Если при этом хоть одно из полученных уравнений интегрируется в квадратурах, то тем самым интегрируется в квадратурах и данное уравнение.

Однако во многих случаях уравнение, записанное в виде (4), интегрируется в квадратурах и непосредственно, без предварительного разрешения его относительно $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$. Более того, в некоторых случаях оказывается, что заданное уравнение имеет вид (2), но ни оно само, ни перевернутое уравнение (2′) не принадлежат ни к какому из известных интегрируемых типов, в то время как соответствующее им уравнение вида (4) интегрируется в квадратурах.

Поэтому, отвечая на вопрос об интегрируемости в квадратурах данного дифференциального уравнения, нужно проверить не принадлежит ли оно к одному из известных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах, будучи записанным либо в виде (2), либо в виде (2′), либо в виде (4).

При рассмотрении уравнений, интегрируемых в квадратурах, чтобы не усложнять изложения, мы будем проводить подробный анализ уравнений и полученных решений (в частности указывать область существования общего решения) лишь в случаях, представляющих наибольший теоретический интерес, ограничиваясь в остальных случаях формальным интегрированием, т. е. нахождением семейства интегральных кривых, зависящего от одной произвольной постоянной и интегральных кривых, не входящих в это семейство (если они существуют).

§ 2. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

19. Уравнение, не содержащее искомой функции. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{1}$$

в котором правая часть не зависит от искомой функции. Это есть простейшее дифференциальное уравнение первого порядка. Мы уже встречались с ним во введении и в п. 5. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Тогда функция

$$y=\int f(x)\, dx+C \tag{2}$$

является общим решением уравнения (1) в области

$$a<x<b, \quad -\infty<y<+\infty. \tag{3}$$

Вся полоса (3) заполнена непересекающимися интегральными кривыми.

Особых решений нет.

Если в формуле (2) в качестве первого слагаемого, т. е. в качестве первообразной для функции $f(x)$ взять определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx^*, \tag{4}$$

где x_0 есть фиксированное значение независимой переменной x, взятое из интервала (a, b) (так что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$), то будем иметь

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx+C. \tag{5}$$

Полагая здесь $x=x_0$ и обозначая $y(x_0)\equiv y_0$, получим $y_0=C$**. Поэтому общее решение (5) можно переписать в виде

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx+y_0. \tag{6}$$

Это есть общее решение уравнения (1) в области (3) в форме Коши (роль произвольной постоянной играет y_0).

Если правая часть уравнения (1) непрерывна во всех точках интервала (a, b) за исключением одной точки $x=\xi$, в которой она обращается в бесконечность, то в окрестности этой точки

* Эта первообразная выделяется среди всех других первообразных тем свойством, что она обращается в нуль при $x=x_0$.

** Ср. Введение, пример 1.

вместо уравнения (1) нужно рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \qquad (1')$$

Прямая $x = \xi$ является очевидно решением уравнения (1′). Согласно сказанному в п. 2, мы должны присоединить это решение к решениям уравнения (1).

Решение $x = \xi$ может быть или частным или особым, в зависимости от того, сохраняется или нарушается в каждой точке этого решения единственность решения задачи Коши. При этом если решение $x = \xi$ частное, то оно часто получается из формулы общего решения при $C = +\infty\ (-\infty)$*, если же оно особое, то при $C = C(y)$**.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}. \qquad (7)$$

Правая часть этого уравнения непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$. Функция

$$y = \frac{1}{x} + C \qquad (8)$$

будет общим решением уравнения (7) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \qquad (9)$$

и

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \qquad (10)$$

Рассмотрим прямую $x = 0$ (ось Oy). Она является решением перевернутого уравнения:

$$\frac{dx}{dy} = -x^2. \qquad (7')$$

Это решение — частное, ибо в каждой точке его выполняется единственность решения задачи Коши, а именно через эту точку, кроме самого решения $x = 0$, не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 11). Решение $x = 0$ получается из формулы общего решения (8) при $C = \infty$.

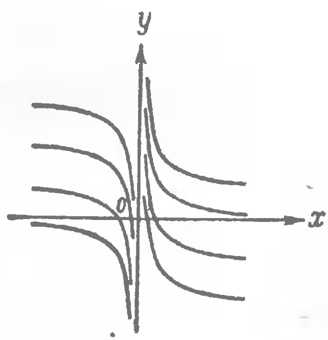


Рис. 11

Пример 2. Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \qquad (11)$$

Здесь правая часть непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$. Функция

$$y = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + C \quad \text{или} \quad y = \sqrt[3]{x^2} + C \qquad (12)$$

---

* Т. е. $\lim\limits_{(x,\,y) \to (\xi,\,y)} \left[y - \int f(x)\,dx\right] = +\infty\ (-\infty)$.

** Т. е. $\lim\limits_{(x,\,y) \to (\xi,\,y)} \left[y - \int f(x)\,dx\right] = C(y)$.

будет общим решением уравнения (11) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \tag{13}$$

и

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \tag{14}$$

Прямая $x = 0$ является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}. \tag{11'}$$

Это решение особое, так как во всех точках его нарушается единственность решения задачи Коши (рис. 12). Решение $x = 0$ получается из формулы общего решения (12) при $C = y$.

Прямая $x = 0$ является огибающей семейства интегральных кривых (12).

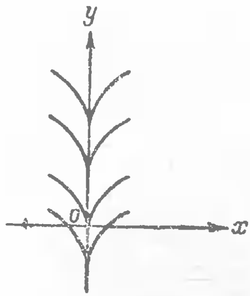


Рис. 12

Заметим, что в рассмотренных примерах прямая $x = 0$ являлась (общей) границей областей, в которых определены общие решения. В первом случае эта граница оказалась частным решением, во втором — особым.

20. Уравнение, не содержащее независимой переменной. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{15}$$

правая часть которого не содержит независимой переменной x. Предположим, что функция $f(y)$ определена и непрерывна в интервале (c, d).

Обратимся к перевернутому уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{15'}$$

Это уравнение не содержит искомой функции x и, следовательно, к нему применимо все сказанное в предыдущем пункте.

Пусть функция $f(y)$ не обращается в нуль ни в одной точке из интервала (c, d). Тогда правая часть уравнения (15′) определена и непрерывна во всем интервале (c, d), и, в силу п. **19**, функция

$$x = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C \tag{16}$$

является общим решением уравнения (15′) в области

$$c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty \tag{17}$$

и, следовательно, общим интегралом уравнения (15).

Общий интеграл (16) можно заменить *общим интегралом в форме Коши:*

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(y)}\, dy + x_0. \tag{18}$$

Здесь y_0 — фиксированное число из интервала (c, d), а x_0 — произвольная постоянная.

При сделанных предположениях относительно функции $f(y)$ уравнение (15) не имеет особых решений.

Если функция $f(y)$, будучи непрерывной в интервале (c, d), обращается в нуль в некоторой точке $y = \eta$ из этого интервала, то правая часть уравнения (15′) обращается в бесконечность в точке $y = \eta$ и мы должны рассмотреть вместо уравнения (15′) перевернутое уравнение, каковым будет данное уравнение (15).

Ясно, что уравнение (15) имеет решение $y = \eta$. Это решение будет частным, если во всех точках его сохраняется единственность решения задачи Коши. В противном случае оно будет особым. При этом если решение $y = \eta$ частное, то оно часто может быть получено из формулы общего интеграла (16) при $C = +\infty\,(-\infty)$*, если же оно — особое, то при $C = C(x)$**.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(y)$ обращается в бесконечность в точке $y = \eta$ внутри интервала (c, d), оставаясь непрерывной и не равной нулю в остальных точках этого интервала. Тогда уравнение (15′) имеет правую часть, непрерывную во всем интервале (c, d). Поэтому через каждую точку области (17) проходит единственная интегральная кривая. Но интегральные кривые, проходящие через точки, лежащие на прямой $y = \eta$, имеют в каждой из этих точек касательную, параллельную оси Oy (рис. 13). Это видно как из формулы общего интеграла (16), так и из самого дифференциального уравнения (15) или из (15′).

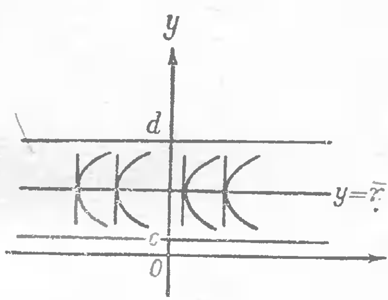


Рис. 13

Все указанные выше результаты относительно уравнения (15) легко получаются и непосредственно, без обращения к перевернутому уравнению (15′). Нужно только следить за тем, чтобы в процессе интегрирования не терять решений***.

Разделим обе части уравнения (15) на функцию $f(y)$:

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad [f(y) = 0?]. \tag{19}$$

В скобках мы указываем для памяти то уравнение, которое следует рассмотреть после интегрирования уравнения (19), ибо,

---

* Т. е. $\lim\limits_{(x,\, y) \to (x,\, \eta)} \left[x - \int \frac{1}{f(y)}\, dy\right] = +\infty\ (-\infty)$.

** Т. е. $\lim\limits_{(x,\, y) \to (x,\, \eta)} \left[x - \int \frac{1}{f(y)}\, dy\right] = C(x)$.

*** См. п. 15.

деля обе части уравнения (15) на $f(y)$, мы могли потерять те решения этого уравнения, которые обращают делитель $f(y)$ в нуль.

Интегрируя уравнение (19), получим общий интеграл (16).

Рассмотрим теперь уравнение $f(y) = 0$. Если оно имеет вещественное решение (одно или несколько) вида $y = \eta$, то прямая $y = \eta$ всегда будет решением уравнения (15). Остается только проверить, каким будет это решение, частным или особым.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}. \tag{20}$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна при всех конечных значениях y, но она обращается в нуль при $y = 0$. Поэтому только ось Ox может быть особым решением.

Прежде чем интегрировать уравнение (20), запишем его подробно в виде двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{y}, \quad \text{если} \quad y \geqslant 0, \\ \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{-y}, \quad \text{если} \quad y \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, имеем*:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad (2\sqrt{y} = 0?), \quad \sqrt{y} = x + C \quad (x > -C),$$

так что

$$y = (x + C)^2 \quad (x > -C) \tag{22}$$

будет общим решением этого уравнения в области

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty. \tag{23}$$

Аналогично, интегрируя второе из уравнений (21), имеем:

$$\frac{dy}{2\sqrt{-y}} = dx \quad (2\sqrt{-y} = 0?), \quad -\sqrt{-y} = x + C \quad (x < -C),$$

откуда находим, что

$$y = -(x + C)^2 \quad (x < -C) \tag{24}$$

является общим решением этого уравнения в области

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < 0. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь решение $y = 0$, которое мы могли потерять при интегрировании. Это решение *особое*, так как через каждую точку его проходит *не одно* решение уравнения (20) (рис. 14).

Заметим, что особое решение $y = 0$ может быть получено из формул общего решения (22) и (24) при $C = -x$. Оно представляет собою (общую) *границу* областей (23) и (25), в которых определены эти общие решения. Ясно также, что особое решение $y = 0$ является *огибающей* семейств интегральных кривых

$$y = (x + C)^2 \ (x \geqslant -C) \quad \text{и} \quad y = -(x + C)^2 \ (x \leqslant -C)$$

уравнений (21).

---

* См. п. **11**.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}. \tag{26}$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна при всех значениях y, кроме $y=0$, и не обращается в нуль. При $y=0$ она обращается в бесконечность. Поэтому через каждую точку плоскости (x, y) проходит

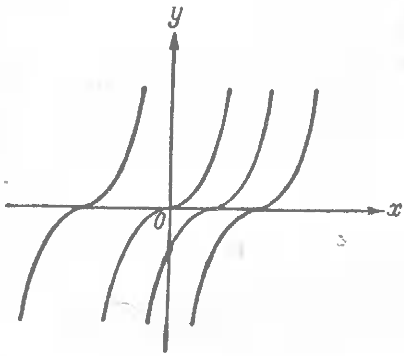


Рис. 14

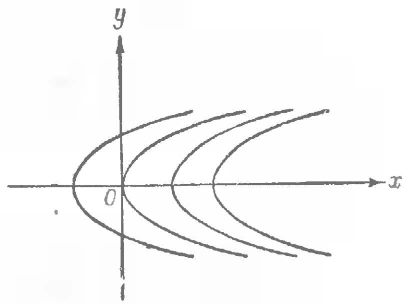


Рис. 15

единственная интегральная кривая, но в точках оси Ox касательные к интегральным кривым параллельны оси Oy.

Действительно, интегрируя уравнение (26), имеем:

$$2y\,dy=dx, \quad y^2=x+C. \tag{27}$$

Найденный общий интеграл представляет собою семейство парабол (рис. 15), для которых осью симметрии является ось Ox, так что вершины лежат на оси Ox. Касательные в вершинах параллельны оси Oy.

В следующих трех параграфах мы ограничиваемся формальным интегрированием рассматриваемых уравнений. В частности мы не указываем в общем случае область задания общего решения. Поэтому следует иметь в виду, что хотя получающимися формулами общего решения (общего интеграла) и можно пользоваться для решения конкретных задач Коши, тем не менее в общем случае нельзя без дополнительных исследований гарантировать, что мы найдем таким путем искомое решение и что оно будет единственным. Чтобы убедиться и в том и в другом, нужно либо исследовать вопрос непосредственно, либо воспользоваться теоремой Пикара.

§ 3. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

21. Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение

$$X(x)\,dx+Y(y)\,dy=0, \tag{1}$$

в котором коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy — только от y. Такое уравнение называется *уравнением с разделенными переменными.*

Будем предполагать, что функции $X(x)$ и $Y(y)$ **непрерывны** при всех рассматриваемых значениях x и y. Тогда уравнение (1) можно переписать так

$$d\left[\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy\right] = 0. \tag{2}$$

Поэтому

$$\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy = C. \tag{3}$$

Это есть **общий интеграл** уравнения (1). Особых решений нет.

Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 в предположении, что $X^2(x_0) + Y^2(y_0) \neq 0$, можно найти (в неявном виде) по формуле

$$\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy = 0, \tag{4}$$

которая определяет искомое решение в виде $y = y(x)$, где $y(x_0) = y_0$ или $x = x(y)$, где $x(y_0) = x_0$.

Действительно, пусть, например, $Y(y_0) \neq 0$. Обозначив левую часть равенства (4) через $F(x, y)$,

$$F(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy, \tag{5}$$

перепишем его в виде

$$F(x,\ y) = 0. \tag{6}$$

Легко убедиться, что при сделанных предположениях относительно $X(x)$ и $Y(y)$, функция $F(x, y)$ удовлетворяет всем условиям известной из курса математического анализа теоремы о существовании неявной функции $y = y(x)$, определяемой уравнением (6)*. В самом деле:

1) Можно указать такой прямоугольник R:

$$|x - x_0| \leqslant A, \quad |y - y_0| \leqslant B \quad (A > 0,\ B > 0) \tag{7}$$

с центром в точке (x_0, y_0), в котором функция $F(x, y)$ будет определена и непрерывна вместе с частными производными F'_x и F'_y.

[Для этого достаточно взять числа A и B настолько малыми, чтобы функции $X(x)$ и $Y(y)$ были определены и непрерывны

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II М., Гостехиздат, 1956, п. 315.

соответственно в интервалах $|x - x_0| \leqslant A$ и $|y - y_0| \leqslant B$, после чего непрерывность $F(x, y)$ непосредственно вытекает из ее вида (5) (почему?). F'_x и F'_y существуют и непрерывны в R, ибо $F'_x = X(x)$, $F'_y = Y(y)$, а $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны при всех рассматриваемых значениях x и y];

2) $F(x_0, y_0) = 0$ [это очевидно из (5)];

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ [ибо $F'_y(x_0, y_0) = Y(y_0)$, а $Y(y_0) \neq 0$].

Поэтому существует одна и только одна функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в некотором интервале $|x - x_0| \leqslant a\, (0 < a \leqslant A)$ и такая, что $F[x, y(x)] \equiv 0$ в этом интервале и $y(x_0) = y_0$.

Функция $y = y(x)$ является решением уравнения (1). Это следует из того, что согласно правилу дифференцирования неявных функций имеет место тождество

$$y'(x) \equiv -\frac{F'_x[x, y(x)]}{F'_y[x, y(x)]}, \tag{8}$$

которое можно переписать так:

$$y'(x) \equiv -\frac{X(x)}{Y[y(x)]} \tag{9}$$

или

$$X(x)\, dx + Y[y(x)]\, d[y(x)] \equiv 0, \tag{10}$$

а это и означает, что $y = y(x)$ есть решение уравнения (1).

Следовательно, $y = y(x)$ является решением поставленной задачи Коши. Это решение единственно.

В формуле (3) можно не писать пределов интегрирования, ибо числа, получающиеся от подстановки нижних пределов, мы можем включить в произвольную постоянную C. Тогда получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\int X(x)\, dx + \int Y(y)\, dy = C. \tag{11}$$

К уравнению с разделенными переменными легко приводится уравнение вида

$$m(x)\, n(y)\, dx + m_1(x)\, n_1(y)\, dy = 0, \tag{12}$$

в котором коэффициенты при dx и dy представляют собою **произведения** функции от x на функцию от y. Такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Относительно функций $m(x)$, $n(y)$, $m_1(x)$ и $n_1(y)$ будем предполагать, что они **непрерывны** при всех рассматриваемых значениях x и y.

Умножая обе части уравнения (12) на

$$\frac{1}{n(y)\, m_1(x)}, \tag{13}$$

получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx+\frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy=0 \quad [n(y)=0,\quad m_1(x)=0?]. \tag{14}$$

Его общим интегралом, а следовательно, и общим интегралом уравнения (12) будет

$$\int\frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx+\int\frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy=C \tag{15}$$

или

$$\int_{x_0}^{x}\frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy=C, \tag{16}$$

где $m_1(x_0)\neq 0,\quad n(y_0)\neq 0.$

Полагая в (16) $C=0$ и предполагая дополнительно, что $m(x_0)$ и $n_1(y_0)$ не равны нулю одновременно, получим решение с начальными данными x_0, y_0:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy=0. \tag{17}$$

22. Особые решения. Разделяя переменные, мы делили обе части уравнения (12) на $n(y)\cdot m_1(x)$. При этом мы могли потерять решения, определяемые уравнениями $n(y)=0$ и $m_1(x)=0$, отмеченными в формуле (14) в скобках. В самом деле, если b есть (вещественный) корень уравнения $n(y)=0$, то, полагая в (12) $y=b$, получим тождество

$$m(x)\;n(b)\;dx+m_1(x)\;n_1(b)\;db\equiv 0. \tag{18}$$

Следовательно, $y=b$ есть решение уравнения (12). Аналогично убеждаемся, что $x=a$, где a — корень уравнения $m_1(x)=0$ тоже является решением уравнения (12). Если эти решения не входят в семейство (15) или (16), т. е. не получаются из (15) или из (16) при частных числовых значениях C, то они представляют собой *особые решения* уравнения (12).

Из решения $y=b$ мы должны исключить точку с абсциссой $x=a$, так как в точке $x=a$, $y=b$ уравнение (12) не определяет наклон поля y'. По той же причине из решения $x=a$ следует исключить точку с ординатой $y=b$.

Таким образом, решения вида $y=b\ (x\neq a)$ и $x=a\ (y\neq b)$ примыкают в точке $x=a$, $y=b$ и могут оказаться *особыми*. Других особых решений нет.

23. Примеры.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0 \tag{19}$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0, 1).

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=0 \quad (x=\pm 1, \quad y=\pm 1?). \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C \quad (C>0) \tag{21}$$

есть общий интеграл. Все решения

$$\left.\begin{aligned} y&=1\ (-1<x<1),\\ y&=-1\ (-1<x<1),\\ x&=1\ (-1<y<1),\\ x&=-1\ (-1<y<1), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

примыкающие соответственно к точкам (— 1, 1), (1, 1); (— 1, — 1), (1, —1); (1, — 1), (1, 1); (— 1, — 1), (— 1, 1) являются **особыми**, так как они не получаются из формулы общего интеграла (21) ни при каких числовых значениях произвольной постоянной и на каждом из них нарушается единственность решения задачи Коши. Они ограничивают область существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (19).

Решим поставленную задачу Коши. Полагая в общем интеграле (21) $x=0$, $y=1$, находим: $C=1$. Подставляя найденное значение C в общий интеграл (21), получим решение нашей задачи Коши в виде

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1. \tag{23}$$

Но через точку (0, 1) проходит и особое решение $y=1$. Окончательно получаем две интегральные кривые, проходящие через точку (0,1):

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1 \quad \text{и} \quad y=1\ (-1<x<1). \tag{24}$$

Пример 2. Дано уравнение

$$\sin x\,dy-y\ln y\,dx=0 \ (y\geqslant 0). \tag{25}$$

Найти интегральные кривые, проходящие через точки $M_1\,(0,1)$ и $M_2\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{y\ln y}-\frac{dx}{\sin x}=0 \quad (y\ln y=0, \quad \sin x=0?). \tag{26}$$

Следовательно,

$$y=e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \tag{27}$$

есть общее решение уравнения (25).

Особых решений нет (почему?).

Переходя к решению предложенных задач Коши заметим, что в точке $M_1(0,\ 1)$ поле не определено. Однако, подставляя в общее решение (27) значения $x=0$, $y=1$, получаем: $1=e^{C\cdot 0}$. Это равенство справедливо при всех значениях C. Следовательно, все интегральные кривые (27) примыкают к точке $M_1(0,\ 1)$. Мы имеем здесь **особый случай** задачи Коши: начальные значения заданы в точке, где поле не определено. Всегда, решая задачу Коши, следует сначала проверить, не имеем ли мы дело с этим особым случаем.

Найдем теперь интегральную кривую, проходящую через точку $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Случай н е о с о б ы й. Имеем $1 = e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$. Осюда $C = 0$ и, следовательно, $y = 1$ $(0 < x < \pi)$ — искомая интегральная кривая.

В заключение настоящего параграфа отметим, что рассмотренные выше уравнения вида $y' = f(x)$, $y' = f(y)$, $X(x)dx + Y(y)dy = 0$ можно считать частными случаями уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение с разделяющимися переменными является одним из основных типов уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной и допускающих интегрирование в квадратурах.

Многие дифференциальные уравнения приводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи соответствующей замены искомой функции и независимой переменной. В следующих двух параграфах мы рассматриваем два наиболее важных типа таких уравнений.

§ 4. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

24. Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

в котором $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть о д н о р о д н ы е ф у н к ц и и о д н о й и т о й ж е с т е п е н и m, причем m может быть любым вещественным числом. Такое уравнение называется *однородным*.

Как известно*, функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени* m, если при всяком t имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \tag{2}$$

т. е. от умножения обоих аргументов x и y на один и тот же множитель t функция приобретает этот же множитель в m-й степени. Полагая в тождестве (2) $t = \frac{1}{x}$, получим:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} f(x, y), \tag{3}$$

откуда

$$f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Пользуясь формулой (4), мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

---

* См.: Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц. Основы математического анализа, т. I. М. Гостехиздат, 1956, п. 145.

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Из формулы (5) следует, что в начале координат однородное уравнение, вообще говоря, не задает определенного направления поля, так что через начало координат не проходит ни одна интегральная кривая. Интегральные кривые однородного уравнения могут лишь примыкать к началу координат*. Поведение интегральных кривых однородного уравнения в окрестности начала координат требует специального исследования**.

Замечание. Если в уравнении (1) $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть только *положительно однородные* функции одной и той же степени m, т. е. тождества

$$\left.\begin{aligned} M(tx, ty) &= t^m M(x, y), \\ N(tx, ty) &= t^m N(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

имеют место только при (всех) положительных значениях t, то уравнение (1) будем называть *положительно однородным*. Оно интегрируется тем же методом, что и однородное уравнение.

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение (1), сделаем замену искомой функции y по формуле:

$$y = zx, \tag{6}$$

где z — новая искомая функция от x. Будем иметь:

$$M(x, zx)\, dx + N(x, zx)\, (z\, dx + x\, dz) = 0. \tag{7}$$

Но, так как

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

то (полагая $y = zx$) имеем:

$$M(x, zx) = x^m M(1, z), \quad N(x, zx) = x^m N(1, z). \tag{9}$$

Поэтому уравнение (7) можно переписать так:

$$x^m M(1, z)\, dx + x^m N(1, z)\, (zdx + xdz) = 0 \tag{10}$$

или (сокращая на x^m и группируя оставшиеся члены)

$$[M(1, z) + N(1, z)\, z]\, dx + xN(1, z)\, dz = 0 \quad (x = 0?). \tag{11}$$

---

* См. п. 4, пример 3.

** Для простейшего случая, когда правая часть уравнения (5) есть дробно-линейная однородная функция от x и y, это исследование приведено в п. 141.

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,\ z)\ dz}{M(1,\ z)+N(1,\ z)\ z}=0 \quad [M(1,z)+N(1,z)\ z=0?]. \qquad (12)$$

Интегрируя, находим:

$$\ln|x|+\int\frac{N(1,\ z)\ dz}{M(1,\ z)+N(1,\ z)\ z}=\ln|C_1|,$$

$$x=Ce^{-\int\frac{N(1,\ z)\ dz}{M(1,\ z)+N(1,\ z)\ z}} \quad (C=\pm|C_1|),$$

так что

$$x=Ce^{\psi(z)}, \qquad (13)$$

где

$$\psi(z)=-\int\frac{N(1,\ z)\ dz}{M(1,\ z)+N(1,\ z)\ z}.$$

Заменяя в (13) z на $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения (1) в виде:

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}. \qquad (14)$$

25. Особые решения. Разделяя переменные в уравнении (11), мы могли потерять решения вида $z=a$, где a — корень уравнения

$$M(1,\ z)+N(1,\ z)\ z=0. \qquad (15)$$

Подставив эти значения z в формулу (6) найдем, что

$$y=ax\ (x\neq 0) \qquad (16)$$

(полупрямые, примыкающие к началу координат) суть решения однородного уравнения. Эти решения могут содержаться в формуле общего интеграла, но могут быть и особыми. Особыми решениями могут быть также полуоси оси Oy: $x=0\ (y\neq 0)$. Других особых решений быть не может.

26. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{x}}. \qquad (17)$$

Заметим, прежде всего, что интегральными кривыми могут быть только кривые, расположенные в первом и третьем квадрантах, и полуоси осей координат, ибо x и y не могут иметь противоположных знаков.

Положим $y=zx$. Получим:

$$z'x+z=\sqrt{z}, \quad \frac{dz}{z-\sqrt{z}}+\frac{dx}{x}=0 \quad (z-\sqrt{z}=0,\quad x=0?). \qquad (18)$$

Интегрируя, найдем:

$$2\ln|\sqrt{z}-1|+\ln|x|=\ln|C_1| \qquad (19)$$

или

$$|\sqrt{z}-1|\sqrt{|x|}=\sqrt{|C_1|}, \quad (\sqrt{z}-1)\sqrt{|x|}=C \; (C=\pm\sqrt{|C_1|}). \qquad (20)$$

Возвращаясь к переменной y $\left(\text{заменяя } z \text{ на } \dfrac{y}{x}\right)$, получим:

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-1\right)\sqrt{|x|}=C, \qquad (21)$$

откуда

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{y}-\sqrt{x}=C, & \text{если} \quad x>0, \quad y>0, \\ \sqrt{-y}-\sqrt{-x}=C, & \text{если} \quad x<0, \quad y<0. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Рассмотрим уравнение $z-\sqrt{z}=0$. Оно имеет корни: $z_1=0$, $z_2=1$. Им соответствуют решения $y=0$ $(x\neq 0)$ и $y=x$ $(x\neq 0)$. Первые из них — особые, вторые — частные. Полуоси оси Oy: $x=0$ $(y\neq 0)$ тоже являются решениями. Эти решения — особые.

27. Геометрическое свойство интегральных кривых однородного уравнения. Поле, определяемое однородным уравнением, а следовательно, и интегральные кривые этого уравнения обладают одним характерным свойством. Чтобы выяснить это свойство, будем рассматривать однородное уравнение в виде (5),

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Заметим, что правая часть уравнения (5) сохраняет постоянное значение во всех точках каждой полупрямой $y=kx (x\neq 0)$, выходящей из начала координат (если $\varphi(k)$ определено), так что все эти полупрямые являются изоклинами уравнения (5).

Возьмем какую-нибудь интегральную кривую, отличную от полупрямой, выходящей из начала координат. Если мы увеличим или уменьшим радиусы-векторы всех ее точек в одно и то же число раз, то получим кривую, у которой направление касательных во всех точках будет такое же, что и в соответствующих точках взятой кривой. Поэтому полученная кривая будет также интегральной кривой уравнения (5). Преобразование, о котором идет речь, равносильно замене текущих координат данной кривой текущими координатами x_1, y_1 новой кривой по формулам:

$$x_1=k\cdot x, \quad y_1=k\cdot y \qquad (23)$$

и называется *преобразованием подобия с центром подобия в начале координат*. Итак, *всякая кривая, полученная из интегральной кривой однородного уравнения при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат, является тоже интегральной кривой.* Легко видеть, что и обратно, *все интегральные кривые, входящие в состав общего интеграла* (14),

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

и не являющиеся полупрямыми, выходящими из начала координат, могут быть получены при помощи преобразования вида (23) *из одной такой интегральной кривой.* Действительно, пусть $x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$ и $x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$ суть две интегральные кривые указанного вида. Обозначив текущие координаты второй интегральной кривой через x_1, y_1, перепишем ее уравнение в виде $x_1 = C_2 e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}$. Умножив обе части уравнения $x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$ на k, получим $kx = kC_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$ или $kx = kC_1 e^{\psi\left(\frac{ky}{kx}\right)}$. Если теперь выбрать $k = \frac{C_2}{C_1}$ и применить формулы (23), то и получим $x_1 = C_2 e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}$ или, что то же, $x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Из доказанного свойства интегральных кривых однородного уравнения, в частности, следует:

1) если интегральная кривая, отличная от полупрямой, выходящей из точки (0, 0) и, следовательно, заключенная на некотором участке изменения x между двумя из полупрямых $y = z_i x$, примыкает к точке (0, 0), то и все интегральные кривые, заключенные между этими полупрямыми, примыкают к точке (0, 0);

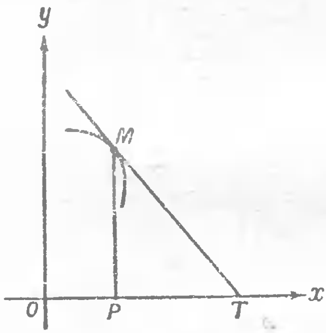


Рис. 16

2) если некоторая кривая является интегральной кривой, то и симметричная относительно начала координат кривая тоже является интегральной кривой;

3) если одна из интегральных кривых замкнута, то и все интегральные кривые замкнуты.

Все это дает нам некоторое представление о поведении интегральных кривых однородного уравнения во всей области задания уравнения.

Пример. Найти кривые, у которых отрезок MT касательной от точки касания до пересечения с осью Ox равен отрезку OT оси Ox (рис. 16).

Так как

$$MT = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}, \quad OT = x - \frac{y}{y'},$$

то условие $MT = OT$ приводит к дифференциальному уравнению

$$y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2,$$

откуда

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$y = zx, \quad z'x = \frac{z + z^3}{1 - z^2}, \quad \frac{1 - z^2}{z + z^3}\, dz = \frac{dx}{x} \quad (z = 0,\ x = 0?).$$

$$\frac{z}{1 + z^2} = Cx,$$

откуда $\left(\text{заменяя } z \text{ на } \dfrac{y}{x}\right)$ получаем общий интеграл:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C.$$

Особых решений нет (почему?).

Интегральные кривые суть окружности с центром на оси Oy, касающиеся оси Ox в начале координат и сама ось Ox (рис. 17). (Строго говоря следует из всех полученных кривых выключить точку $(0, 0)$, так как в этой точке поле не определено.)

Все эти окружности можно получить из одной из них при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.

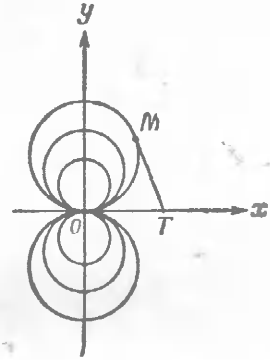


Рис. 17

28. Простейшее уравнение, приводящееся к однородному. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right). \quad (24)$$

Если $c_1 = c = 0$, то это уравнение однородное, ибо оно приводится к виду (5). Пусть хоть одно из чисел c_1, c отлично от нуля и предположим еще, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0. \quad (25)$$

Сделаем линейную замену обеих переменных*:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta. \quad (26)$$

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta + a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right).$$

Выбрав α и β так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 &= 0, \\ a\alpha + b\beta + c &= 0, \end{aligned}\right\}$$

* Геометрически это соответствует переносу начала координат в точку (α, β).

3 Зак. 494

получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right). \tag{27}$$

Интегрируя его и возвращаясь к переменным x и y, найдем общий интеграл уравнения (24).

Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \tag{25'}$$

то мы имеем $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, откуда $a_1 = ka$, $b_1 = kb$. Поэтому уравнение (24) можно переписать в этом случае так:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) \equiv f_1(ax+by). \tag{24'}$$

Введя здесь вместо y новую неизвестную функцию z по формуле

$$z = ax + by, \tag{28}$$

мы придем к уравнению, не содержащему независимой переменной:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf_1(z). \tag{29}$$

§ 5. ОБОБЩЕННОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

29. Построение общего интеграла. Особые решения. Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *обобщенным однородным*, если существует такое число k, что левая часть уравнения становится однородной функцией от величин x, y, dx и dy при условии, что они считаются величинами соответственно первого, k-го, нулевого и $(k-1)$-го измерений, т. е. если равенство

$$M(tx, t^k y)\,dx + N(tx, t^k y)\,t^{k-1}\,dy = t^m\,[M(x, y)\,dx + N(x,y)\,dy] \tag{2}$$

выполняется при всех t тождественно относительно x, y, dx и dy или, что то же, при всех t выполняются тождества*:

$$\left.\begin{aligned} M(tx, t^k y) &= t^m M(x, y), \\ N(tx, t^k y) &= t^{m-k+1} N(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* При $k = 1$ имеем обычное однородное уравнение.

Полагая в тождествах (3) $t = \frac{1}{x}$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} M\left(1, \frac{1}{x^k} y\right) &= \frac{1}{x^m} M(x, y), \\ N\left(1, \frac{1}{x^k} y\right) &= \frac{1}{x^{m-k+1}} N(x, y), \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= x^m M\left(1, \frac{1}{x^k} y\right), \\ N(x, y) &= x^{m-k+1} N\left(1, \frac{1}{x^k} y\right). \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Из этих формул ясно, что при $k = 0$ обобщенное однородное уравнение вырождается в уравнение с разделяющимися переменными.

Покажем, что *при всяком k, отличном от нуля, обобщенное однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными,* если положить

$$y = zx^k, \tag{6}$$

где z — новая неизвестная функция.

Действительно, выполняя в уравнении (1) подстановку (6), имеем:

$$M(x, zx^k)\, dx + N(x, zx^k)(x^k dz + kzx^{k-1} dx) = 0. \tag{7}$$

Воспользуемся тождествами (5), положив в них $y = zx^k$.

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} M(x, zx^k) &= x^m M(1, z), \\ N(x, zx^k) &= x^{m-k+1} N(1, z), \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

так что уравнение (7) можно переписать в виде

$$x^m M(1, z)\, dx + x^{m-k+1} N(1, z)(x^k dz + kzx^{k-1} dx) = 0 \tag{9}$$

или (сокращая на x^m и собирая члены при dx и dz)

$$[M(1, z) + kN(1, z)\, z]\, dx + xN(1, z)\, dz = 0 \quad (x = 0?). \tag{10}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)\, dz}{M(1, z) + kN(1, z)\, z} = 0 \; (M(1, z) + kN(1, z)\, z = 0?). \tag{11}$$

Интегрируя, находим:

$$x = Ce^{\psi(z)}, \tag{12}$$

где

$$\psi(z) = -\int \frac{N(1, z)\,dz}{M(1, z) + kN(1, z)\,z}.$$

Возвращаясь к искомой функции y, получаем общий интеграл уравнения (1) в виде:

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x^k}\right)}. \tag{13}$$

Особыми решениями могут быть только

$$x = 0 \quad (y \neq 0) \quad \text{и} \quad y = ax^k \quad (x \neq 0), \tag{14}$$

где a — корень уравнения:

$$M(1, z) + kN(1, z)\,z = 0. \tag{15}$$

30. Пример. Рассмотрим уравнение

$$(6 - x^2y^2)\,dx + x^2dy = 0. \tag{16}$$

Приравнивая измерения всех членов $6dx$, $-x^2y^2dx$ и x^2dy в предположении, что, x, y, dx и dy суть величины соответственно 1-го, k-го, нулевого и $(k-1)$-го измерений, получаем систему:

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1. \tag{17}$$

Эта система совместна, причем $k = -1$. Следовательно, уравнение (16) есть обобщенное однородное. Для интегрирования его нужно сделать подстановку:

$$y = \frac{z}{x}, \tag{18}$$

после чего получим уравнение:

$$xdz - (z^2 + z - 6)\,dx = 0. \tag{19}$$

Интегрируя его, находим:

$$z = \frac{2 - 3Cx^5}{1 - Cx^5}. \tag{20}$$

Возвращаясь к функции y, получаем общее решение уравнения (16) в виде:

$$y = \frac{2 - 3Cx^5}{x(1 - Cx^5)}. \tag{21}$$

Особых решений нет (почему?).

§ 6. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

31. Понятие о линейном уравнении. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

называется *линейным*. Оно содержит искомую функцию y и ее производную y' только в первой степени. Если записать его в виде, разрешенном относительно производной, то получим уравнение

$$y' = -p(x)\ y + q(x), \tag{2}$$

правая часть которого есть **линейная** функция от y с коэффициентами, зависящими от x (которые, в частности, могут быть и постоянными).

Относительно функций $p(x)$ и $q(x)$ будем предполагать, что они непрерывны в интервале (a, b) $(a \geqslant -\infty,\ b \leqslant +\infty)$.

Если в уравнении (1) функция $q(x)$ тождественно равна нулю во всем интервале (a, b), то это уравнение принимает вид

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3}$$

и называется *однородным*. Его левая часть есть **однородная линейная** функция от y и y'. Уравнение (1), в котором $q(x) \not\equiv 0$, называется *неоднородным*.

Уравнение вида

$$p_0(x)\ y' + p_1(x)y = q(x), \tag{4}$$

в котором коэффициент при y' не равен единице, также называется *линейным*. Если $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b), причем $p_0(x)$ **не обращается** (в этом интервале) **в нуль**, то уравнение (4), делением обеих частей его на $p_0(x)$, приводится к уравнению вида (1), в котором коэффициент при искомой функции и правая часть непрерывны в интервале (a, b).

32. Существование и единственность решения задачи Коши. Общие свойства линейного уравнения. Из теоремы Пикара о достаточном условии существования и единственности решения задачи Коши, сформулированной в пункте 7, следует, что *при сделанных предположениях относительно $p(x)$ и $q(x)$ уравнение (1) имеет единственное решение*

$$y = y(x), \tag{5}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = y_0 \quad \textit{при} \quad x = x_0, \tag{6}$$

*где в качестве x_0 можно брать любое число из интервала (a, b), а y_0 можно выбирать **произвольно**,* т. е. через любую точку $M_0(x_0, y_0)$ *полосы* (рис. 18)

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty \tag{7}$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

В самом деле, если записать уравнение (1) в виде*:

$$y' = -p(x)\ y + q(x) \equiv f(x,\ y), \tag{8}$$

---

* Ср. п. 13.

то ясно, что можно построить такой прямоугольник

$$R: \quad |x - x_0| \leqslant a_1, \quad |y - y_0| \leqslant b_1$$

с центром в точке (x_0, y_0), целиком содержащийся внутри полосы (7), что внутри него правая часть уравнения (8) будет удовлетворять обоим условиям теоремы Пикара, ибо в этом прямоугольнике $f(x, y)$ непрерывна и ограничена, а $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$, так что $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена. А тогда уравнение (8) или, что то же, уравнение (1) имеет одно и только одно решение с начальными данными x_0, y_0. Это решение непрерывно дифференцируемо. Ниже мы докажем, что *оно определено во всем интервале* (a, b). Всякое решение линейного уравнения (1) есть частное решение, так как во всей области задания этого уравнения, т. е. во всей полосе (7), имеет место существование и единственность решения задачи Коши. *Линейное уравнение* (1) *при сделанных предположениях не имеет особых решений.*

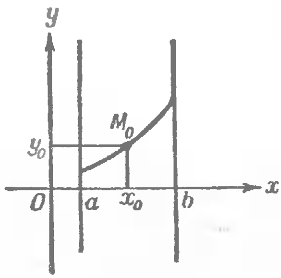


Рис. 18

Таким образом, вся полоса (7) заполнена непересекающимися гладкими интегральными кривыми уравнения (1), причем каждая интегральная кривая определена во всем интервале (a, b) и представляет собою график частного решения.

При этом *интегральные кривые однородного уравнения* (3) *не могут пересекать ось Ox*, ибо в противном случае в точке пересечения нарушалась бы единственность решения задачи Коши. В самом деле, пересечение могло бы иметь место только в интервале (a, b) оси Ox, а сам этот интервал, т. е. $y = 0 \, (a < x < b)$ тоже, очевидно, является решением уравнения (3), так что через точку пересечения проходили бы две интегральные кривые. Отсюда следует, что *если какое-нибудь решение однородного линейного уравнения обращается в нуль в одной точке интервала* (a, b)*, *то оно тождественно равно нулю во всем этом интервале, если же оно отлично от нуля хоть в одной точке интервала* (a, b), *то оно не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.*

Прежде чем перейти к интегрированию линейного уравнения, отметим два общих свойства этого уравнения.

* Т. е. интервала непрерывности коэффициента $p(x)$.

1. *Линейное уравнение сохраняет свой вид (т. е. остается линейным) при любой замене независимой переменной*

$$x = \varphi(t), \tag{9}$$

где $\varphi(t)$ *— любая функция от* t, *определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале* (t_0, t_1), *причем* $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ *во всем интервале* (t_0, t_1)*. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}. \tag{10}$$

Поэтому, подставляя $x = \varphi(t)$ в (1), получим линейное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + p\,[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,y = q\,[\varphi(t)]\,\varphi'(t), \tag{11}$$

причем его коэффициент при y и правая часть непрерывны в интервале (t_0, t_1).

2. *Линейное уравнение сохраняет свой вид при любой линейной замене искомой функции*

$$y = \alpha(x)\,z + \beta(x), \tag{12}$$

где z *— новая неизвестная функция, а* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *— произвольные непрерывно дифференцируемые функции от* x, *причем* $\alpha(x) \neq 0$ *в* (a, b). Действительно, так как

$$y' = \alpha'(x)\,z + \alpha(x)\,z' + \beta'(x), \tag{13}$$

то после преобразования получим

$$\alpha'(x)\,z + \alpha(x)\,z' + \beta'(x) + p(x)\,[\alpha(x)\,z + \beta(x)] = q(x)$$

или

$$z' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\,\alpha(x)}{\alpha(x)}\,z = \frac{q(x) - \beta'(x) - p(x)\,\beta(x)}{\alpha(x)}, \tag{14}$$

т. е. опять линейное уравнение, у которого коэффициент при искомой функции и правая часть непрерывны в (a, b).

Заметим, что если $\alpha(x)$ обращается в нуль в некоторых точках интервала (a, b), то преобразованное уравнение будет тоже линейным, но коэффициент при искомой функции и правая часть могут иметь разрыв в этих точках.

33. Построение общего решения однородного линейного уравнения. Покажем, что *линейное уравнение всегда интегрируется в квадратурах.* Рассмотрим сначала однородное линейное

---

* При этих предположениях существует обратная функция $t = \psi(x)$, определенная и непрерывная вместе с первой производной в интервале (a, b).

уравнение (3),

$$y' + p(x)\; y = 0,$$

где функция $p(x)$ непрерывна в интервале (a, b).

Переписав это уравнение в виде

$$dy + p(x)\; y\,dx = 0, \tag{15}$$

получаем **уравнение с разделяющимися переменными**. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{y} + p(x)\; dx = 0 \;\; (y = 0?),$$

откуда

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{16}$$

где C — произвольная постоянная.

Все решения уравнения (3) содержатся в формуле (16), так как разделяя переменные, мы могли потерять лишь очевидное *нулевое* решение $y = 0$, но и оно содержится в (16) при $C = 0$. Из формулы (16) видно, что *всякое решение уравнения* (3) *определено во **всем** интервале* (a, b).

Покажем, что *функция* (16) *является **общим решением** уравнения* (3) *в области* (7), *т. е. во всей области задания уравнения* (3).

В самом деле, уравнение (16) разрешимо относительно C в области (7), так что мы имеем:

$$C = ye^{\int p(x)\,dx}, \tag{17}$$

где функция справа определена в области (7). Кроме того, по построению функция (16) является решением уравнения (3) в интервале (a, b) при всех значениях произвольной постоянной C. А это, согласно сказанному в п. 8, и означает, что функция (16) есть общее решение уравнения (3) в области (7).

Заменим в формуле (16) неопределенный интеграл определенным интегралом с переменным верхним пределом x и фиксированным нижним пределом $x_0 (a < x_0 < b)$. Получим:

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}. \tag{18}$$

Положим здесь $x = x_0$ и обозначим $y(x_0) \equiv y_0$. Тогда $y_0 = C$. Подставив это значение C в (18), получим:

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}. \tag{19}$$

Если y_0 произвольно, то эта формула является общим решением уравнения (3) в области (7) в форме Коши. Если же y_0 фиксировано, то это есть решение уравнения (3) с начальными данными x_0, y_0.

Из формулы (19) мы снова видим, что *если начальное значение y_0 решения $y = y(x)$ однородного линейного уравнения* (3) *равно нулю, то $y \equiv 0$* $(a < x < b)$ и *если $y_0 \neq 0$, то решение $y = y(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала* (a, b)*.

Заметим, что если $a = -\infty$, $b = +\infty$, так что область (7) принимает вид

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{20}$$

то формула (19) дает решение задачи Коши для уравнения (3) с любыми наперед заданными начальными данными x_0, y_0, причем каждое решение будет определено при всех значениях x.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, y = 0.$$

Здесь коэффициент $p(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ есть функция, определенная и непрерывная в интервале $(-1, +1)$. Пользуясь формулой (16), найдем:

$$y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это есть общее решение рассматриваемого уравнения в области:

$$-1 < x < +1, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Пример 2. Пусть дано уравнение:

$$y' + 2xy = 0.$$

В этом случае $p(x) = 2x$ не имеет точек разрыва. Поэтому всякое решение определено при всех x. Действительно, интегрируя данное уравнение, получаем:

$$y = Ce^{-x^2},$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Пример 3. Найти решение уравнения:

$$y' - y \cdot \cos x = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию.

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Пользуясь формулой (19), получаем:

$$y = e^{\int\limits_0^x \cos x\, dx} \qquad \text{или} \quad y = e^{\sin x}.$$

---

* См. п. 32.

34. Свойства решений однородного линейного уравнения. Решения однородного линейного уравнения обладают следующими двумя характерными для этого уравнения свойствами.

1. *Если y_1 есть частное решение уравнения* (3), *т. е. имеет место тождество*

$$y_1' + p(x)\ y_1 \equiv 0 \quad (a < x < b), \tag{21}$$

то функция

$$y = Cy_1, \tag{22}$$

где C — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

Действительно, полагая в левой части уравнения (3) $y = Cy_1$ и принимая во внимание тождество (21), получим:

$$(Cy_1)' + p(x)\ (Cy_1) = C\ [y_1' + p(x)y_1] \equiv 0\ (a < x < b). \tag{23}$$

Следовательно, $y = Cy_1$ есть решение уравнения (3).

2. *Если y_1 — ненулевое частное решение уравнения* (3), *то формула* (22), *где C — произвольная постоянная, дает общее решение уравнения* (3) *в области* (7).

В самом деле, уравнение (22) разрешимо в области (7) относительно C:

$$C = \frac{y}{y_1} \tag{24}$$

и, как показано выше, функция (22) является решением уравнения (3) при всех значениях C. Следовательно, функция (22) есть общее решение уравнения (3) в области (7).

Таким образом, *для построения общего решения однородного линейного уравнения достаточно найти какое-нибудь одно ненулевое частное решение.*

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' + ay = 0, \tag{25}$$

где коэффициент a — постоянное вещественное число. Очевидно, что

$$y_1 = e^{-ax} \tag{26}$$

будет ненулевым частным решением уравнения (25) в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. на всей оси Ox. Поэтому функция

$$y = Ce^{-ax} \tag{27}$$

будет общим решением уравнения (25) на всей плоскости (x, y).

Из свойства 2 следует, что *всякие два ненулевых частных решения* y_1 и y_2 *уравнения* (3) *связаны соотношением вида:*

$$y_2 \equiv \alpha\, y_1\ (a < x < b), \tag{28}$$

где α — некоторая постоянная, отличная от нуля.

35. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1),

$$y' + p(x)\ y = q(x).$$

Предположим, что нам известно некоторое решение y_1 этого уравнения, т. е. имеем тождество:

$$y_1' + p(x)\ y_1 \equiv q(x) \quad (a < x < b). \tag{29}$$

Введем новую неизвестную функцию z по формуле

$$y = y_1 + z. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (1), имеем:

$$y_1' + z' + p(x)\ y_1 + p(x)\ z = q(x). \tag{31}$$

Отсюда, согласно тождеству (29), получаем:

$$z' + p(x)\ z = 0. \tag{32}$$

Мы получили для определения z однородное линейное уравнение, левая часть которого имеет тот же вид, что и левая часть уравнения (1).

Уравнение (32) называется *однородным линейным уравнением, соответствующим неоднородному линейному уравнению* (1). Общее решение уравнения (32) имеет вид:

$$z = Ce^{-\int p(x)\ dx}, \tag{33}$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя найденное значение z в (30), получим:

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\ dx}. \tag{34}$$

Все решения уравнения (1) содержатся в формуле (34). *Эта формула представляет собою общее решение уравнения* (1) *в полосе*

$$a < x < b^*, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{35}$$

т. е. во всей области задания уравнения (1) (почему?).

Таким образом, мы приходим к следующей теореме, устанавливающей структуру общего решения линейного неоднородного уравнения.

Теорема. *Если y_1 есть частное решение неоднородного линейного уравнения* (1),

$$y' + p(x)\ y = q(x),$$

---

* Напоминаем, что (a, b) есть интервал непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$.

то общее решение этого уравнения дается формулой (30),

$$y = y_1 + z,$$

где

$$z = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

есть общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (32),

$$z' + p(x)\,z = 0.$$

Из этой теоремы следует, что *знание одного частного решения неоднородного уравнения* (1) *дает возможность получить общее решение при помощи одной квадратуры.*

Если мы знаем не одно, а два частных решения y_1 *и* y_2 *неоднородного уравнения* (1), *то общее решение можно получить вовсе без квадратур, а именно общим решением будет*

$$y = y_1 + C\,(y_2 - y_1). \tag{36}$$

Действительно, из формулы (30) имеем: $z = y - y_1$; заменяя здесь y на y_2, видим, что $y_2 - y_1$ есть частное решение однородного уравнения (32). Тогда общее решение уравнения (32) дается формулой $z = C(y_2 - y_1)$ и, согласно доказанной теореме, формула (36) дает общее решение уравнения (1).

Выяснив структуру общего решения уравнения (1), укажем один общий способ фактического построения общего решения.

36. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Будем искать решение уравнения (1) в том же виде, что и общее решение (33) соответствующего однородного уравнения (32), но будем считать C не постоянной, а некоторой непрерывно дифференцируемой функцией от x, т. е. положим

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} \tag{37}$$

и выберем функцию $C(x)$ так, чтобы (37) удовлетворяло уравнению (1). Подставляем (37) в (1):

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = q(x),$$

откуда:

$$C'(x) = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C, \tag{38}$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя это значение $C(x)$ в формулу (37), получим:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C + \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{39}$$

Это есть решение уравнения (1) по построению и притом общее в полосе (35), так как оно имеет структуру (30).

В самом деле, переписав (39) в виде суммы двух слагаемых

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx, \tag{40}$$

видим, что первое слагаемое является общим решением соответствующего однородного уравнения (32), а второе есть (частное) решение неоднородного уравнения (1), ибо оно содержится в формуле (40) при $C = 0$.

Таким образом, *общее решение неоднородного линейного уравнения* (1) *всегда может быть найдено двумя квадратурами.*

Из формулы (40) следует также, что *общее решение линейного уравнения имеет вид*

$$y = A(x)\,C + B(x), \tag{41}$$

т. е. y является линейной функцией от произвольной постоянной C.

Такой характер зависимости общего решения от произвольной постоянной имеет место только для линейного уравнения. Действительно, составляя дифференциальное уравнение семейства (41), придем к уравнению вида (1)*.

Замечание 1. В формуле общего решения (40) можно заменить неопределенные интегралы определенными интегралами с переменным верхним пределом. Тогда получим:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx\right],$$

где x_0 — любое фиксированное число из интервала (a, b). Здесь $C = y(x_0) \equiv y_0$. Поэтому общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx\right], \tag{42}$$

* В предположении, что $A(x)$ и $B(x)$ непрерывно дифференцируемы в некотором интервале (a, b), причем $A(x) \neq 0$ в (a, b).

где роль произвольной постоянной играет начальное значение y_0 искомой функции y. Формула (42) является общим решением уравнения (1) в области (35) в форме Коши.

Очевидно, что при фиксированном значении y_0 формула (42) дает решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Это решение определено во всем интервале (a, b).

Решение (42) можно переписать в виде*:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{-\int_{\xi}^{x} p(t)\,dt}\, d\xi. \qquad (42')$$

Замечание 2. Формула (42) показывает, что если $p(x)$ и $q(x)$ заданы и непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$, так что правая часть линейного уравнения (2),

$$y' = -p(x)\, y + q(x),$$

задана и непрерывна на всей плоскости (x, y), то и решение с любыми начальными данными x_0, y_0 будет непрерывно и даже непрерывно дифференцируемо при всех значениях x, так что интегральная кривая, проходящая через любую точку (x_0, y_0), будет гладкой кривой на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

---

* В самом деле, мы имеем:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \int_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\, dx =$$

$$= y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t)\,dt}\, d\xi =$$

$$= y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\, d\xi =$$

$$= y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{-\int_{\xi}^{x_0} p(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\, d\xi =$$

$$= y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{-\int_{\xi}^{x} p(t)\,dt}\, d\xi.$$

Для нелинейного уравнения это свойство, вообще говоря, не имеет места. Возьмем, например, уравнение $y' = y^2$. Его правая часть определена и непрерывна на всей плоскости (x, y). Однако из формулы общего решения

$$y = -\frac{1}{x+C} \tag{43}$$

видно, что никакое из решений, входящих в эту формулу при $C \neq \infty$ не будет определено при всех значениях x. Для выяснения причины этого различия между линейными и нелинейными уравнениями требуется более детальная формулировка теоремы Пикара, которая будет дана в пятой главе*.

Замечание 3. Если $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в (a, b), за исключением отдельных точек, то формула общего решения (42) остается в силе для всех значений x из (a, b), кроме, быть может, точек разрыва функций $p(x)$ и $q(x)$, если интегралы при переходе через точки разрыва не теряют смысл.

Замечание 4. Линейное уравнение

$$p_0(x)\, y' + p_1(x)\, y = f(x) \tag{44}$$

может иметь особые решения вида $x = a$, где a — корень уравнения $p_0(x) = 0$.

Замечание 5. Общее решение неоднородного линейного уравнения (1) можно найти также следующим методом, принадлежащим Эйлеру.

Умножим обе части уравнения (1) на функцию

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}. \tag{45}$$

Получим уравнение

$$y' e^{\int p(x)\, dx} + p(x)\, y e^{\int p(x)\, dx} = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}, \tag{46}$$

в котором левая часть есть точная производная от функции

$$y e^{\int p(x)\, dx}, \tag{47}$$

так что мы можем переписать это уравнение в виде

$$\left[y e^{\int p(x)\, dx}\right]' = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}, \tag{48}$$

откуда

$$y e^{\int p(x)\, dx} = \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C \tag{49}$$

и, следовательно,

$$y = e^{-\int p(x)\, dx}\left[C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx\right].$$

---

* См. пп. 124 и 126.

Мы получили тот же вид общего решения, что и при применении метода Лагранжа.

Функция (45) называется *интегрирующим множителем* линейного уравнения (1), а изложенный метод Эйлера — *методом интегрирующего множителя.*

Замечание 6. Если в линейном уравнении (1),

$$y' + p(x)\ y = q(x) \tag{50}$$

функции $q(x)$ и $p(x)$ связаны соотношением

$$q(x) = kp(x) \quad (k = \text{const}), \tag{51}$$

то оно принимает вид

$$y' + p(x)\ y = kp(x) \tag{52}$$

и является уравнением с разделяющимися переменными. Его общим решением будет

$$y = k + Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{53}$$

Это же общее решение мы можем получить, пользуясь формулой (30), заметив, что $y_1 = k$ является частным решением уравнения (52).

37. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' - \frac{2}{x}\ y = x. \tag{54}$$

Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее однородное уравнение

$$z' - \frac{2}{x}\ z = 0$$

имеет общее решение

$$z = Cx^2.$$

Ищем общее решение данного неоднородного уравнения (54) в виде

$$y = C(x)\ x^2. \tag{55}$$

Подставляя (55) в (54), имеем:

$$C'(x)\ x^2 + C(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}\ C(x)\ x^2 = x$$

или

$$C'(x = \frac{1}{x},$$

откуда

$$C(x) = \ln|x| + C. \tag{56}$$

Подставляя это значение $C(x)$ в формулу (55), получим:

$$y = x^2 (C + \ln|x|). \tag{57}$$

Это и есть общее решение уравнения (54).

Проинтегрируем уравнение (54) методом интегрирующего множителя. Имеем:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая обе части уравнения (54) на $\frac{1}{x^2}$ приведем его к виду

$$\left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)' = \frac{1}{x},$$

откуда

$$y = x^2\,(C + \ln|x|).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$xy' + 2x^2y = 1, \tag{58}$$

пользуясь формулой общего решения (39).

Имеем:

$$p(x) = 2x, \quad q(x) = \frac{1}{x}.$$

Подставляя в формулу (39), получим:

$$y = e^{-\int 2x\,dx}\left[C + \int \frac{1}{x}\, e^{\int 2x\,dx}\,dx\right]$$

или

$$y = e^{-x^2}\left[C + \int \frac{e^{x^2}}{x}\,dx\right]. \tag{59}$$

38. Геометрическое свойство интегральных кривых линейного уравнения. Выясним одно геометрическое свойство интегральных кривых линейного уравнения (1),

$$y' + p(x)\,y = q(x).$$

Пусть y_1 и y_2 — два каких-либо частных решения уравнения (1). Тогда, как показано в п. 35, общее решение может быть записано в виде (36),

$$y = y_1 + C\,(y_2 - y_1).$$

Пусть y_3 — частное решение, отличное от y_1 и y_2. Тогда оно содержится в (36) при некотором значении произвольной постоянной $C = C_1$:

$$y_3 = y_1 + C_1\,(y_2 - y_1). \tag{60}$$

Отсюда легко выводятся два тождества:

$$y_3 - y_1 = C_1\,(y_2 - y_1), \quad y_2 - y_3 = (1 - C_1)\,(y_2 - y_1), \tag{61}$$

из которых следует, что

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{1 - C_1}{C_1} \equiv \overline{C}_1, \tag{62}$$

т. е. *всякая интегральная кривая линейного уравнения делит в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя интегральными кривыми этого уравнения.* Установленное свойство может быть использовано при построении интегральных кривых линейного уравнения. Кроме того, из него вытекает одно характерное свойство касательных к интегральным кривым линейного уравнения.

Из равенств

$$\frac{M_3M_2}{M_1M_3}=\frac{N_3N_2}{N_1N_3}=\ldots=\overline{C_1}\ (63)$$

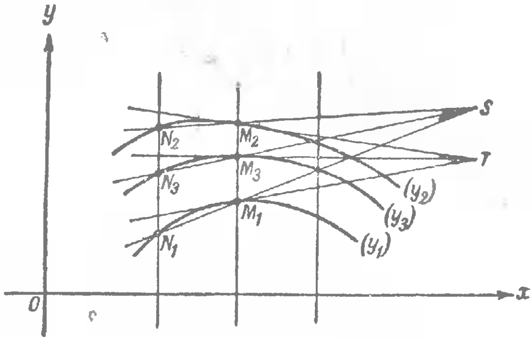


Рис. 19

вытекает (рис. 19), что секущие N_1M_1, N_3M_3, N_2M_2, . . . должны или пересекаться в одной точке, или быть параллельными. При не ограниченном приближении отрезка N_1N_2 к отрезку M_1M_2 эти секущие перейдут в касательные в точках M_1, M_3, M_2, ... Таким образом, *касательные к интегральным кривым линейного уравнения, проведенные в точках пересечения этих кривых прямой, параллельной оси Oy, или пересекаются в одной точке, или параллельны.*

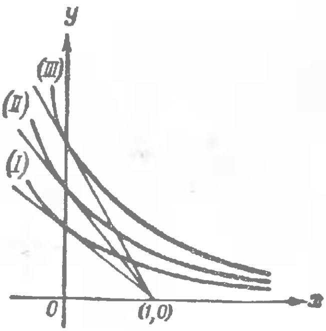


Рис. 20

Пример 1. Возьмем уравнение

$$y' + y = 0. \qquad (64)$$

Рассмотрим три частных решения:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = 2e^{-x}, \quad y_3 = \frac{4}{3}\ e^{-x}. \qquad (65)$$

Здесь

$$\frac{y_2-y_3}{y_3-y_1}=\frac{2e^{-x}-\frac{4}{3}\ e^{-x}}{\frac{4}{3}\ e^{-x}-e^{-x}}=2, \ (66$$

так что (62) выполняется, причем $\overline{C_1}=2$. Построим касательные $(I)-(III)$ к интегральным кривым (65) в точках пересечения их с осью Oy (рис. 20). Имеем:

$$(I)\ Y-1=-X, \quad (II)\ Y-2=-2X, \quad (III)\ Y-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\ X. \quad (67)$$

Все эти касательные [как и касательные $Y=-C(X-1)$ ко всем интегральным кривым $y=Ce^{-x}$ в точках пересечения этих кривых с осью Oy] пересекаются в точке $X=1$, $Y=0$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = x \operatorname{tg} x + 1. \tag{68}$$

Заметив, что $y_1 = x$ является частным решением, получаем, что общим решением его является

$$y = C \cdot \cos x + x. \tag{69}$$

Касательные ко всем интегральным кривым в точках пересечения их с осью Oy параллельны, так как все они составляют угол 45° с положительным направлением оси Ox. В самом деле,

$$y' = -C \sin x + 1, \quad y'|_{x=0} = 1, \tag{70}$$

какую бы интегральную кривую ни взять*.

§ 7. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

39. Построение общего решения. Уравнение вида

$$y' + p(x)\ y = q(x)\ y^m, \tag{1}$$

где m — любое вещественное число, называется *уравнением Бернулли*. Будем считать, что m отлично от 0 и 1, ибо в этих случаях уравнение Бернулли вырождается в линейное. Относительно функций $p(x)$ и $q(x)$ будем предполагать, что они непрерывны в интервале (a, b).

Уравнение Бернулли всегда может быть сведено к линейному уравнению. В самом деле, преобразуем сначала правую часть уравнения Бернулли к виду правой части линейного уравнения. Для этого разделим обе части уравнения (1) на y^m:

$$y^{-m} y' + p(x)\, y^{1-m} = q(x)\ (y^m = 0?). \tag{2}$$

Введем теперь новую неизвестную функцию z, положив

$$y^{1-m} = z \left(y = z^{\frac{1}{1-m}}\right). \tag{3}$$

Тогда

$$(1-m)\ y^{-m} y' = z'. \tag{4}$$

Поэтому, умножая обе части уравнения (2) на $1-m$ и выполняя подстановку (3), приходим к линейному уравнению

$$z' + (1-m)\ p(x)\ z = (1-m)\ q(x). \tag{5}$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной y, получим общее решение уравнения Бернулли в виде

$$y = \left\{ e^{\int (m-1)\, p(x)\, dx} \left[C + \int (1-m)\, q(x)\, e^{\int (1-m)\, p(x)\, dx} dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}, \tag{6}$$

40. Особое решение. Деля уравнение (1) на y^m, мы могли потерять решение $y = 0$. Очевидно, что это могло случиться

---

* Это видно также и из самого дифференциального уравнения (68). Имеем $y' = 1$ при $x = 0$, каково бы ни было значение y.

лишь при $m > 0$ (так как при $m \leqslant 0$ функция $y = 0$ не является решением уравнения Бернулли). Далее, если $m > 1$, то решение $y = 0$ содержится в формуле (6) при $C = \infty$. Оно является частным решением, ибо через точки оси Ox не проходит ни одна интегральная кривая, кроме самой оси Ox, так что во всякой точке оси Ox решение существует и единственно. Если же $0 < m < 1$, то решение $y = 0$ не содержится в формуле общего решения (6) и является особым, ибо в каждой точке этого решения нарушается единственность решения задачи Коши. Решение $y = 0$ может быть получено из формулы (6) при $C = C(x)$. В качестве простейших примеров, иллюстрирующих сказанное, могут служить уравнения $y' = y^2$ и $y' = 2\sqrt{y}$. Для первого из них решение $y = 0$ — частное, для второго — особое (почему?).

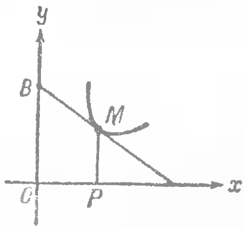


Рис. 21

41. Пример. Найти кривые, у которых отрезок OB, отсекаемый касательной на оси Oy, равен квадрату ординаты PM точки касания (рис. 21).

Пусть $M(x, y)$ — любая точка искомой кривой $y = y(x)$. Уравнение касательной в точке $M(x, y)$ имеет вид:

$$Y - y = y'(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной. Полагая в этом уравнении $X = 0$, находим:

$$Y = y - xy', \quad \text{так что} \quad OB = y - xy'. \tag{7}$$

Условие задачи приводит к уравнению

$$y - xy' = y^2 \quad \text{или} \quad y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2. \tag{8}$$

Это — уравнение Бернулли. Деля обе части на y^2, имеем:

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}. \tag{9}$$

Полагая

$$y^{-1} = z, \tag{10}$$

получим:

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}. \tag{11}$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, находим:

$$z = \frac{1}{x}(C + x). \tag{12}$$

Следовательно,

$$y = \frac{x}{x + C}. \tag{13}$$

Интегральными кривыми уравнения (8) будут также полуоси оси $Ox: y = 0$ $(x \neq 0)$.

Решениями задачи являются гиперболы (13), их горизонтальная асимптота $y = 1$ и ось Ox.

§ 8. УРАВНЕНИЕ ДАРБУ

42. Построение общего интеграла. Особые решения. Рассмотрим уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy + P(x, y)\,(xdy - ydx) = 0, \tag{1}$$

где M и N — однородные функции степени m, а P — однородная функция степени l. Уравнение такого вида называется *уравнением Дарбу*. Если $l = m - 1$, то уравнение Дарбу будет, очевидно, однородным уравнением.

Покажем, что *уравнение Дарбу приводится к уравнению Бернулли.*

Для этого сделаем подстановку:

$$y = zx, \tag{2}$$

где z — новая неизвестная функция. Имеем:

$$dy = z\,dx + x\,dz, \quad x\,dy - y\,dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2\,dz. \tag{3}$$

Поэтому, переписав уравнение (1) в виде*:

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy + x^l P\left(1, \frac{y}{x}\right) (x\,dy - y\,dx) = 0$$

и выполняя подстановку (2), получим:

$$x^m M(1, z)\,dx + x^m N(1, z)\,(z\,dx + x\,dz) + x^{l+2} P(1, z)\,dz = 0.$$

Сократим на x^m ** и соберем члены при dx и dz:

$$[M(1, z) + N(1, z)\,z]\,dx + [N(1, z)\,x + P(1, z)\,x^{l+2-m}]\,dz = 0\ (x = 0?).$$

Деля обе части этого уравнения на $M(1, z) + N(1, z)\,z$ и на dz***, получаем:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{N(1, z)}{M(1, z) + N(1, z)\,z}\,x = -\dfrac{P(1, z)}{M(1, z) + N(1, z)\,z}\,x^{l+2-m} \\ [M(1, z) + N(1, z)\,z = 0?]. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Это — уравнение Бернулли с искомой функцией x от независимой переменной z. Интегрируя уравнение (4) и возвращаясь к переменной y, найдем общий интеграл уравнения Дарбу. Полупрямые вида $y = ax$ $(x \neq 0)$, где a — корень уравнения $M(1, z) + N(1, z)\,z = 0$, могут быть особыми решениями.

43. Пример. Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy + x^2\,(x\,dy - y\,dx) = 0. \tag{5}$$

---

* См. п. 24, формула (8).

** При этом мы, быть может, теряем решение $x = 0$, если $m > 0$ и $N(0, y) \equiv 0$.

*** Тем самым мы принимаем z за независимую переменную.

Полагая $y = zx$, имеем:

$$x\,dx + zx\,(x\,dz + z\,dx) + x^4\,dz = 0 \tag{6}$$

или

$$(1 + z^2)\,dx + (zx + x^3)\,dz = 0 \quad (x = 0?). \tag{7}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}\,x = -\frac{1}{1+z^2}\,x^3. \tag{8}$$

Это — уравнение Бернулли. Интегрируя его, найдем:

$$\frac{1}{x^2} = C\,(1 + z^2) + (1 + z^2)\,\operatorname{arctg} z + z. \tag{9}$$

Возвратившись к переменной y, получим:

$$C\,(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + xy - 1 = 0 \tag{10}$$

или

$$\rho^2 = \frac{1}{C + \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi} \quad (x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi)^*. \tag{11}$$

Некоторым обобщением одного частного случая уравнения Дарбу является *уравнение Якоби***

$$(a + a_1x + a_2y)\,(xdy - ydx) - (b + b_1x + b_2y)\,dy + {}$$
$$+ (c + c_1x + c_2y)\,dx = 0. \tag{12}$$

§ 9. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

44. Существование и единственность решения задачи Коши. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x,\ y),$$

в котором правая часть есть квадратичная функция от (искомой функции) y, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = P\,(x)\,y^2 + Q\,(x)\,y + R\,(x). \tag{1}$$

---

* Уравнение (5) интегрируется проще, если сразу перейти к полярным координатам.

** Н. М. Гюнтер. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Курс лекций (литогр.), 1914/15 уч. г. Другой метод исследования уравнения Якоби, принадлежащий Д. Ф. Егорову, см. в книге: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, М., 1958, стр. 41—46.

Такое уравнение называется *уравнением Риккати.* Будем считать, что функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b) $(a \geqslant -\infty, b \leqslant +\infty)$, причем $P(x) \neq 0$ и $R(x) \neq 0$ в этом интервале (в противном случае уравнение Риккати вырождается в линейное уравнение или уравнение Бернулли).

При сделанных предположениях относительно $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ уравнение Риккати (1) *имеет единственное решение*

$$y = y(x), \tag{2}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = y_0 \quad \textit{при} \quad x = x_0, \tag{3}$$

где x_0 принадлежит интервалу (a, b), а за y_0 можно брать любое число, т. е. через каждую точку (x_0, y_0) полосы

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty \tag{4}$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения Риккати.*

Действительно, всегда можно построить прямоугольник

$$R: \quad |x - x_0| \leqslant a_1, \quad |y - y_0| \leqslant b_1$$

с центром в точке (x_0, y_0), который целиком лежит в полосе (4). В этом прямоугольнике правая часть уравнения Риккати (1) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара (почему?). А тогда уравнение (1) имеет единственное решение (2), удовлетворяющее начальному условию (3). Это решение определено, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Существование этого решения во всем интервале непрерывности коэффициентов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ не гарантируется.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2 - 2y + 1.$$

Здесь правая часть определена и непрерывна на всей плоскости (x, y). Но из формулы общего решения

$$y = 1 - \frac{1}{x - C}$$

видно, что никакое из решений, входящих в эту формулу при $C \neq \infty$, не будет определено при всех x.

Из сказанного выше следует, что *уравнение Риккати не имеет особых решений. Всякое решение его есть частное решение.*

---

* См. п. 13.

45. Общие свойства уравнения Риккати. Прежде чем перейти к вопросу об интегрируемости уравнения Риккати в квадратурах, отметим два общих свойства его.

1. *Уравнение Риккати, так же как и линейное уравнение, сохраняет свой вид при любом преобразовании независимой переменной*

$$x = \varphi(t), \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция, определенная в интервале (t_0, t_1), причем $\varphi'(t) \neq 0$ в (t_0, t_1).

Действительно, так как

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\varphi'(t),$$

то преобразованное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = \left\{ P[\varphi(t)]\, y^2 + Q[\varphi(t)]\, y + R[\varphi(t)] \right\} \varphi'(t),$$

т. е. является опять уравнением Риккати.

2. *В отличие от линейного уравнения, уравнение Риккати сохраняет свой вид не только при любом линейном преобразовании искомой функции, но также и при любом дробно-линейном преобразовании*

$$y = \frac{\alpha(x)\, z + \beta(x)}{\gamma(x)\, z + \delta(x)}, \tag{6}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ — *произвольные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые в интервале (a, b), подчиненные лишь очевидному условию* $\alpha(x)\cdot\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$.

В самом деле, дифференцируя (6), находим:

$$y' = \frac{(\alpha' z + \alpha z' + \beta')(\gamma z + \delta) - (\alpha z + \beta)(\gamma' z + \gamma z' + \delta')}{(\gamma z + \delta)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) z' + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma') z^2 + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \alpha\delta' - \beta\gamma') z + \beta'\delta - \beta\delta'}{(\gamma z + \delta)^2}, \tag{7}$$

так что левая часть уравнения (1) заменится дробью (7). Правая же часть уравнения (1) после замены y выражением (6) и приведения к общему знаменателю обратится в дробь, числитель которой есть квадратичная функция от z, а знаменатель — тот же, что и у дроби (7). Поэтому преобразованное уравнение будет опять уравнением Риккати.

Применяя то или иное из указанных преобразований мы можем значительно упростить вид уравнения Риккати и, таким образом, облегчить его изучение.

46. Приведение уравнения Риккати к каноническому виду. Покажем, что *уравнение Риккати путем линейных преобразований искомой функции можно привести к виду*

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x) \tag{8}$$

(на некотором интервале изменения x), т. е. сделать коэффициент при y^2 равным $+1$ или -1 и избавиться от члена, содержащего y в первой степени, если $P''(x)$ и $Q'(x)$ существуют и непрерывны.

Положим в (1)

$$y = \alpha(x)\, z, \tag{9}$$

где $\alpha(x)$ — пока неопределенная функция от x, а z — новая неизвестная функция. Тогда будем иметь:

$$\alpha'(x)\, z + \alpha(x)\, z' = P(x)\, \alpha^2(x)\, z^2 + Q(x)\, \alpha(x)\, z + R(x),$$

откуда:

$$z' = P(x)\, \alpha(x)\, z^2 + \left[Q(x) - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right] z + \frac{R(x)}{\alpha(x)}.$$

Если взять

$$\alpha(x) = \pm \frac{1}{P(x)}\,*,$$

т. е. сделать подстановку:

$$y = \pm \frac{1}{P(x)}\, z, \tag{10}$$

то коэффициент при z^2 станет равным ± 1. Преобразованное уравнение будет иметь вид

$$z' = \pm z^2 + \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right] z \pm R(x)\, P(x). \tag{11}$$

Чтобы избавиться от коэффициента при искомой функции, сделаем еще одну подстановку:

$$z = u + \beta(x), \tag{12}$$

где $\beta(x)$ пока неопределенная функция от x, а u — новая неизвестная функция. Тогда получим:

$$u' + \beta'(x) = \pm [u + \beta(x)]^2 + \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right][u + \beta(x)] \pm R(x)\, P(x)$$

---

* Мы ограничиваемся рассмотрением лишь того интервала, в котором $P(x)$ не обращается в нуль.

или

$$u' = \pm u^2 + \left[\pm 2\beta(x) + Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right] u \pm \beta^2(x) +$$
$$+ \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right] \beta(x) \pm R(x)\ P(x) - \beta'(x).$$

Чтобы уничтожить коэффициент при u, достаточно положить

$$\beta(x) = \mp \frac{1}{2}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right],$$

т. е. сделать подстановку:

$$z = u \mp \frac{1}{2}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]. \tag{13}$$

Получим:

$$u' = \pm u^2 \mp \frac{1}{4}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]^2 \pm$$
$$\pm R(x)\ P(x) \pm \frac{1}{2}\left[Q'(x) + \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)}\right].$$

Объединяя постановки (10) и (13), видим, что подстановка

$$y = \pm \frac{1}{P(x)}\left\{u \mp \frac{1}{2}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]\right\} \tag{14}$$

приводит уравнение Риккати (1) к виду

$$u' = \pm u^2 + R_1(x), \tag{15}$$

где

$$R_1(x) = \mp\left\{\frac{1}{4}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]^2 -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left[Q'(x) + \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)}\right]\right\} \pm R(x)\ P(x).$$

Таким образом, при помощи линейной замены искомой функции уравнение Риккати всегда может быть приведено к виду (8) на каждом участке, в котором $P(x)$ не обращается в нуль. Такой вид уравнения Риккати называется *каноническим*.

47. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах. Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости уравнения Риккати в квадратурах.

Если P, Q и R — постоянные, то уравнение Риккати представляет собою уравнение с разделяющимися переменными и, следовательно, общий интеграл его находится в квадратурах. В данном случае он выражается через элементарные функции.

При переменных P, Q и R уравнение Риккати, в отличие от уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах, интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях.

Отметим некоторые простейшие случаи интегрируемости в квадратурах уравнения Риккати (с переменными коэффициентами).

Это прежде всего уравнения вида

$$y' = \varphi(x)\ (ay^2 + by + c) \tag{16}$$

и

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\ \frac{y}{x} + c, \tag{17}$$

где a, b и c — постоянные числа (причем $a^2 + c^2 \neq 0$), ибо первое из них есть уравнение с разделяющимися переменными, а второе — однородное. Уравнение (17) интегрируется в элементарных функциях.

Уравнение Риккати

$$y' = a\ \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\ \frac{y}{x} + c \quad \text{или} \quad xy' = ay^2 + \frac{1}{2}\ y + cx \tag{18}$$

$(a^2 + c^2 \neq 0)$ приводится к уравнению вида (16), если положить

$$y = z\sqrt{x}, \tag{19}$$

где z — новая неизвестная функция. Действительно, подставляя (19) в (18), получим:

$$\sqrt{x}z' = az^2 + c. \tag{20}$$

Следовательно, уравнение (18) интегрируется в элементарных функциях.

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}\ y + \frac{C}{x^2}, \tag{21}$$

где A, B и C — постоянные числа, тоже интегрируется в квадратурах и даже в элементарных функциях. В самом деле, нетрудно убедиться, что уравнение (21) является обобщенным однородным, причем $k = -1$. Выполняя теперь подстановку $y = \frac{z}{x}$, мы придем к уравнению с разделяющимися переменными:

$$xz' = Az^2 + (B + 1)\ z + C,$$

общий интеграл которого выражается через элементарные функции.

48. Построение общего решения в случае, когда известно одно частное решение. Существование общего решения уравнения Риккати вытекает из теоремы существования общего решения, которую мы докажем в гл. V.

В отношении построения общего решения в квадратурах уравнение Риккати выделяется среди нелинейных уравнений общего вида тем, что знание одного частного решения дает возможность найти его общее решение в квадратурах. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Если известно одно частное решение уравнения Риккати, то последнее всегда можно привести к уравнению Бернулли.*

Действительно, пусть y_1 — частное решение уравнения Риккати (1), так что

$$y_1' \equiv P(x)\ y_1^2 + Q(x)\ y_1 + R(x). \tag{22}$$

Сделаем в уравнении (1) замену искомой функции, положив

$$y = y_1 + z, \tag{23}$$

где z — новая искомая функция. Тогда будем иметь:

$$y_1' + z' = P(x)\ y_1^2 + 2P(x)\ y_1 z + P(x)\ z^2 + \\ + Q(x)\ y_1 + Q(x)\ z + R(x). \tag{24}$$

Принимая во внимание тождество (22), мы и получим для определения z уравнение Бернулли:

$$z' - [2P(x)\ y_1 + Q(x)]\ z = P(x)\ z^2. \tag{25}$$

Уравнение (25) подстановкой $\frac{1}{z} = u$ сводится к линейному уравнению

$$u' + [2P(x)\ y_1 + Q(x)]\ u = -P(x). \tag{26}$$

Следовательно, *уравнение Риккати в случае, когда известно одно частное решение его, интегрируется двумя квадратурами.* На практике нужно сразу делать подстановку.

$$y = y_1 + \frac{1}{u}, \tag{27}$$

приводящую уравнение Риккати (1) сразу к линейному уравнению (26).

Отметим два очевидных случая, в которых частное решение находится легко:

$$R(x) = -P(x)\ b^2 - Q(x)\ b, \qquad y_1 = b; \tag{28}$$

$$R(x) = -P(x)\ x^2 - Q(x)\ x + 1, \qquad y_1 = x. \tag{29}$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1. \tag{30}$$

Здесь $y_1 = x$ — частное решение. Сделаем подстановку

$$y = x + \frac{1}{u}, \tag{27'}$$

тогда получим:

$$u' + 3x^2u = -x, \tag{26'}$$

откуда:

$$u = e^{-x^3}\left(C - \int e^{x^3} x\,dx\right). \tag{31}$$

Следовательно,

$$y = x + \frac{e^{x^3}}{C - \int e^{x^3} x\,dx}. \tag{32}$$

Замечание. Из формулы (27), между прочим, видно, что, в отличие от решений линейного уравнения, *решение уравнения Риккати может обращаться в бесконечность при конечном значении* x (т. е. интегральная кривая может иметь вертикальную асимптоту) *даже тогда, когда коэффициенты* $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ *заданы и непрерывны при всех значениях* x. На примере уравнения $y' = y^2 - 2y + 1$ мы это уже видели в пункте 44.

49. Структура общего решения. Общее решение линейного уравнения (26) имеет вид*

$$u = A(x)\,C + B(x).$$

Подставляя это выражение для u в формулу (27), получим общее решение уравнения Риккати в следующем виде:

$$y = y_1 + \frac{1}{A(x)\,C + B(x)} = \frac{y_1A(x)\,C + y_1B(x) + 1}{A(x)\,C + B(x)}$$

или

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}, \tag{33}$$

т. е. *общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной* C.

Такой характер зависимости общего решения от произвольной постоянной имеет место только для уравнения Риккати. Действительно, пусть (33) есть общее решение некоторого дифференциального уравнения, причем $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0$. Тогда, разрешая (33) относительно C и исключая C дифференцированием, имеем:

$$\frac{\varphi_2(x) - y\psi_2(x)}{y\psi_1(x) - \varphi_1(x)} = C,$$

$$(\varphi_2' - y'\psi_2 - y\psi_2')(y\psi_1 - \varphi_1) - (\varphi_2 - y\psi_2)(y'\psi_1 + y\psi_1' - \varphi_1') = 0$$

или

$$(\psi_2\varphi_1 - \varphi_2\psi_1)\,y' + (-\psi_2'\psi_1 + \psi_2\psi_1')\,y^2 +$$
$$+ (\varphi_2'\psi_1 + \psi_2'\varphi_1 - \varphi_2\psi_1' - \psi_2\varphi_1')\,y - \varphi_2'\varphi_1 + \varphi_2\varphi_1' = 0, \tag{34}$$

---

* См. п. 36, формула (41).

что после деления на коэффициент при y' приводит к у р а в н е н и ю   Р и к к а т и.

50. Построение общего решения в случае, когда известны два или три частных решения. *Если известны два частных решения уравнения Риккати, то общее решение его находится одной квадратурой.*

В самом деле, если y_1 и y_2 — частные решения уравнения Риккати, то из (27) следует, что для линейного уравнения (26) известно одно частное решение

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

а тогда общее решение этого уравнения находится одной квадратурой. Следовательно, в таком случае общее решение уравнения Риккати находится одной квадратурой.

Наконец, *если известны три частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится вовсе без квадратур.*

Действительно, пусть y_1, y_2, y_3 — частные решения уравнения Риккати. Тогда

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

суть два частных решения линейного уравнения (26), а тогда его общее решение, согласно формуле (36) п. **35**, находится без квадратур:

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right). \tag{35}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае общее решение уравнения Риккати находится без квадратур.

Заменяя в равенстве (35) функцию u ее значением из формулы (27), получим.

$$\frac{1}{y - y_1} = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right).$$

Разрешая это равенство относительно C, найдем о б щ и й   и н т е г р а л   уравнения Риккати в виде

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C. \tag{36}$$

Отсюда следует, между прочим, что для всяких четырех частных решений уравнения Риккати имеет место тождество

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{const}. \tag{37}$$

51. Специальное уравнение Риккати. Выше мы показали, как найти общее решение уравнения Риккати в случае, когда известно одно, два или три частных решения. Сейчас мы рассмотрим один частный вид уравнения Риккати, в котором при некотором условии общее решение выражается в элементарных функциях, причем находится без предварительного знания частных решений. Уравнение, о котором идет речь, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m, \tag{38}$$

где A, B и m — постоянные числа, и называется *специальным уравнением Риккати.* Именно это уравнение и было изучено самим Риккати в XVIII веке. Укажем два случая, когда уравнение (38) интегрируется в элементарных функциях:

1°. $m = 0$. Тогда уравнение (38) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = B. \tag{39}$$

Здесь переменные разделяются, причем общее решение найдется в элементарных функциях.

2°. $m = -2$. При этом значении m уравнение (38) перепишется так:

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = \frac{B}{x^2}. \tag{40}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (21) и, следовательно, его общее решение находится в элементарных функциях.

Кроме этих значений m, специальное уравнение Риккати (38) *интегрируется в элементарных функциях при всяком значении m, для которого выражение*

$$\frac{m}{2m+4} \tag{41}$$

является целым числом (положительным или отрицательным). А именно можно доказать, что если показатель m удовлетворяет этому условию, то при помощи соответствующих преобразований независимой переменной и линейных и дробно-линейных преобразований искомой функции, специальное уравнение Риккати (38) может быть приведено к виду (39), т. е. к случаю $m = 0$*, или к уравнению Риккати вида (18)**. Как показал Лиувилль *при всех других значениях показателя m специальное уравнение Риккати* (38) *не интегрируется даже в квадратурах.*

Пример 1. Дано уравнение

$$y' = y^2 + x^{-4}. \tag{42}$$

---

* См.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 51—53.

** См.: Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Изд-во ЛГУ, 1965, стр. 54—56.

Здесь $A = -1$, $B = 1$, $m = -4$. Вычисляя выражение (41) при $m = -4$, имеем:

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-4}{-8+4} = 1. \tag{43}$$

Следовательно, уравнение (42) интегрируется в элементарных функциях.

Пример 2. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x^{-\frac{4}{3}} \tag{44}$$

имеем:

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}+4} = -1, \tag{45}$$

так что оно тоже интегрируется в элементарных функциях.

Пример 3. Уравнение

$$y' = x^2 + y^2 \tag{46}$$

не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах от элементарных функций, ибо

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{1}{4} \text{ (не целое число!)}. \tag{47}$$

§ 10. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

52. Понятие об уравнении в полных дифференциалах. В предыдущих параграфах мы изучили несколько типов уравнений, разрешенных относительно производной, которые всегда допускали (за исключением уравнения Риккати) интегрирование в квадратурах.

Сейчас мы рассмотрим один новый тип таких уравнений. Этот тип вследствие того, что к нему сводятся некоторые из ранее изученных, а также и многие другие уравнения, имеет важное значение в теории дифференциальных уравнений. Речь идет об *уравнении в полных дифференциалах*. Так называется уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

левая часть которого представляет собою полный дифференциал некоторой функции U от x и y, т. е.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = dU. \tag{2}$$

Относительно функций M и N мы будем предполагать, что они непрерывны по обеим переменным в некоторой односвязной области* и ни в одной точке этой области не обращаются одновременно в нуль.

---

* Например, в прямоугольнике. Вообще область G называется *односвязной,* если она не имеет «дырок», даже точечных (см. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 265.).

Уравнение в полных дифференциалах можно записать так:

$$dU = 0. \tag{3}$$

Поэтому **общий интеграл** его имеет вид

$$U(x, y) = C. \tag{4}$$

При этом функция U является **интегралом*** уравнения (1).

Особых решений уравнение в полных дифференциалах, очевидно, не имеет.

Рассмотрим в качестве первого примера уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{5}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции

$$U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}. \tag{6}$$

Поэтому общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = C^2 \; (C^2 = 2C_1). \tag{7}$$

В качестве второго примера возьмем уравнение

$$(x^3 + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0. \tag{8}$$

Раскроем скобки и сгруппируем члены так, чтобы каждая группа представляла собою полный дифференциал:

$$x^3\,dx + (y\,dx + x\,dy) - y\,dy = 0 \tag{9}$$

или

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d(xy) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

Заменяя сумму дифференциалов на дифференциал суммы, получаем:

$$d\left(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}\right) = 0, \qquad U = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}. \tag{11}$$

Следовательно, уравнение (8) является уравнением в полных дифференциалах, а равенство

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C \tag{12}$$

есть его общий интеграл. Ясно, что построение функции U подобной группировкой слагаемых возможно лишь в том случае, если заранее известно, что левая часть уравнения представляет собою полный дифференциал. Но даже когда это и известно, нам не всегда удается легко подобрать соответствующую груп-

---

* См. п. 16

пировку слагаемых. Поэтому возникают два вопроса: 1) как узнать по виду уравнения (1), является ли оно уравнением в полных дифференциалах? 2) В случае положительного ответа на первый вопрос, как построить функцию U и, следовательно, общий интеграл уравнения (1)?

53. Признак уравнения в полных дифференциалах. Построение общего интеграла. Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ имеют непрерывные частные производные соответственно по y и по x. Пусть левая часть уравнения (1) представляет собою полный дифференциал, т. е.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

Это равносильно тому, что имеют место тождества

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \tag{13}$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по y, а второе по x, получаем тождества:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}; \tag{14}$$

левые части полученных тождеств равны между собою*, а тогда равны и правые, т. е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{15}$$

Условие (15) *является необходимым для того, чтобы левая часть уравнения* (1) *была полным дифференциалом.* Покажем, что *это условие является достаточным.* Действительно, пусть условие (15) выполнено. Покажем, что тогда существует функция U, удовлетворяющая соотношению (2) или, что то же, обоим равенствам (13).

Будем исходить и з п е р в о г о из равенств (13):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y). \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что ему удовлетворяет функция

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y)^{**}, \tag{17}$$

---

* Если смешанные производные непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования (см.: Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц. Основы математического анализа, т. I. М., Гостехиздат, 1956, стр. 261).

** Интеграл имеет смысл, так как область, в которой определена $M(x, y)$, о д н о с в я з н а.

где $\varphi(y)$ — **произвольная функция** от y, которую мы будем считать дифференцируемой и выберем ее так, чтобы функция (17) удовлетворяла и второму из равенств (13), т. е. чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi'(y) = N(x, y), \tag{18}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y)^{*}. \tag{19}$$

Используя условие (15), перепишем это равенство так:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y). \tag{20}$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$N(x, y)\Big|_{x=x_0}^{x=x} + \varphi'(y) = N(x, y) \quad \text{или}$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y),$$

откуда

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

следовательно,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C', \tag{21}$$

где C' — **уже произвольная постоянная**. Подставляя найденное выражение функции $\varphi(y)$ в формулу (17), получаем искомую функцию $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C', \tag{22}$$

что и доказывает достаточность условия (15). Итак, *тождественное выполнение равенства* (15) *является необходимым и достаточным признаком уравнения в полных дифференциалах.*

Взяв одну из функций (22), например, ту, в которой $C' = 0$, и приравняв ее произвольной постоянной C, получим **общий**

---

* Выполненное здесь дифференцирование по параметру y под знаком интеграла законно, так как $M(x, y)$ по предположению непрерывна по x и y вместе с производной $\frac{\partial M}{\partial y}$ (см. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 141).

интеграл уравнения (1) в следующем виде:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \qquad (23)$$

Если при построении функции U брать за исходное второе из равенств (13), то мы получим для общего интеграла следующее выражение:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = C. \qquad (24)$$

В формулах (23) и (24) нижние пределы интегрирования x_0 и y_0 можно выбирать произвольно в пределах рассматриваемой односвязной области, но так, чтобы получающиеся интегралы имели смысл. Удачный выбор x_0 и y_0 во многих случаях облегчает задачу интегрирования уравнения.

Пример 1. Рассмотрим снова уравнение (8),

$$(x^3 + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0.$$

Здесь

$$M = x^3 + y, \quad N = x - y, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \qquad (25)$$

так что условие (15) выполнено. Для получения общего интеграла воспользуемся формулой (23), где положим $x_0 = y_0 = 0$, тогда получим

$$\int_{0}^{x} (x^3 + y)\,dx + \int_{0}^{y} (-y)\,dy = C. \qquad (26)$$

Выполняя интегрирование, получим общий интеграл опять в виде (12).

Пример 2. Дано уравнение

$$xy\,dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad (y > 0). \qquad (27)$$

Условие (15) выполнено. Применим формулу (23), положив $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Получим:

$$\int_{0}^{x} xy\,dx + \int_{1}^{y} \frac{1}{y}\,dy = C, \qquad \frac{x^2 y}{2} + \ln y = C. \qquad (28)$$

(Мы не можем полагать $y_0 = 0$, так как $y = 0$ не принадлежит области определения коэффициентов).

54. Решение задачи Коши. Формулы (23) и (24) дают возможность легко получить решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, если точка (x_0, y_0) лежит в указанной выше области.

Достаточно взять в качестве нижних пределов эти начальные данные и положить $C = 0$. Получим две формулы:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy = 0, \tag{29}$$

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy = 0, \tag{30}$$

которые и определяют (каждая в отдельности) искомое р е ш е н и е з а д а ч и К о ш и. Оно будет е д и н с т в е н н ы м.

В самом деле, рассмотрим, например, формулу (29). Обозначая ее левую часть через $U(x, y)$:

$$U(x, y) \equiv \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy, \tag{31}$$

имеем $U(x_0, y_0) = 0$, но хоть одна из частных производных $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ отлична от нуля в точке (x_0, y_0), ибо последние равны соответственно $M(x_0, y_0)$ и $N(x_0, y_0)$. Отсюда, согласно теореме о существовании неявной функции* уравнение (29) в случае $N(x_0, y_0) \neq 0$ определяет y как функцию от x, $y = y(x)$, удовлетворяющую условию $y(x_0) = y_0$, а в случае $M(x_0, y_0) \neq 0$ оно определяет x как функцию от y, $x = x(y)$, где $x(y_0) = x_0$**.

Заметим, однако, что иногда удобнее сначала найти общее решение, пользуясь произволом выбора x_0, y_0 в формулах (23) — (24), а затем уже находить решение задачи Коши по общему правилу.

Если $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$, то мы имеем особый случай задачи Коши [5]. Интегральные кривые, примыкающие к точке (x_0, y_0), следует искать из формулы (23) или (24). Однако при этом не гарантируется ни существование, ни единственность решения задачи Коши.

§ 11. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

55. Понятие об интегрирующем множителе. Мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение в полных дифференциалах всегда интегрируется в квадратурах. Поэтому естественно

* См. сноску на стр. 60.

** Ср. нахождение решения задачи Коши для уравнения с разделенными переменными. Функция $y = y(x)[x = x(y)]$ является решением уравнения (1) (почему?).

возникает вопрос: нельзя ли уравнение не в полных дифференциалах привести к виду уравнения в полных дифференциалах? Оказывается, что во многих случаях это можно сделать. А именно, удается найти функцию $\mu = \mu(x, y)$, после умножения на которую уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

преобразуется в уравнение

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0 \tag{2}$$

в полных дифференциалах, т. е.

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = dU(x, y). \tag{3}$$

Такая функция μ называется *интегрирующим множителем*, а функция $U(x, y)$ — *соответствующим ему интегралом* уравнения (1). Общий интеграл уравнения (1) дается равенством

$$U(x, y) = C. \tag{4}$$

При этом относительно функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ мы, так же как и в предыдущем параграфе, предполагаем, что они непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой односвязной области и ни в одной точке этой области не обращается одновременно в нуль, а от интегрирующего множителя μ мы требуем, чтобы он не обращался в нуль и имел непрерывные частные производные первого порядка.

Применяя признак полного дифференциала к уравнению (2), находим, что интегрирующий множитель μ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{5}$$

Запишем его уравнение в развернутом виде:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \mu. \tag{6}$$

Это — уравнение с частными производными первого порядка с неизвестной функцией μ.

В общем случае задача интегрирования уравнения (6) не легче, чем задача интегрирования уравнения (1). Эти задачи эквивалентны. Но в некоторых случаях удается легко найти решение уравнения (6) и тем самым интегрирующий множитель μ уравнения (1). В следующих пунктах мы рассмотрим несколько таких случаев.

56. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от x. Предположим, что уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, $\mu = \mu(x)$. В этом случае $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, так что уравнение (6) принимает вид

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \mu \tag{7}$$

или (предполагая, что $N \neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{8}$$

Здесь левая часть есть функция от x. Тогда и правая часть должна быть функцией т о л ь к о от x. Таким образом, для существования интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x)$ необходимо, чтобы

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x). \tag{9}$$

При этом (8) имеет вид:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(x), \tag{8'}$$

откуда

$$\mu = Ce^{\int \psi(x)\,dx}, \tag{10}$$

так что, если существует $\mu = \mu(x)$, то он содержится в формуле (10). Полагая, для простоты записи, $C = 1$, получим:

$$\mu = e^{\int \psi(x)\,dx}. \tag{11}$$

Покажем, что *при выполнении условия* (9) *функция* (11) *будет интегрирующим множителем уравнения* (1). В самом деле, в этом случае уравнение (6) примет вид:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \psi(x)\,\mu.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (11) есть решение этого уравнения и, следовательно, интегрирующий множитель уравнения (1).

В качестве примера найдем интегрирующий множитель л и н е й н о г о у р а в н е н и я

$$y' + p(x)\,y = q(x). \tag{12}$$

Перепишем это уравнение в дифференциальной форме:

$$[p(x)\,y - q(x)]\,dx + dy = 0.$$

Проверяя выполнение условия (9), имеем:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv p(x)=\psi(x).$$

Следовательно, функция

$$\mu=e^{\int p(x)\,dx} \tag{13}$$

есть **интегрирующий множитель линейного уравнения.** Мы получили тот самый интегрирующий множитель, которым уже пользовались в замечании 5 п. 36.

57. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от y. Найдем условие, при котором интегрирующий множитель зависит только от y: $\mu=\mu(y)$. В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$-M\frac{d\mu}{dy}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{14}$$

или (если $M\neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \tag{15}$$

Если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\psi(y), \tag{16}$$

то **интегрирующий множитель** дается формулой

$$\mu=e^{\int\psi(y)\,dy}. \tag{17}$$

58. Случай интегрирующего множителя вида $\mu=\mu[\omega(x, y)]$. Рассмотрим более общий случай, когда интегрирующий множитель представляет собою функцию от заданной функции $\omega(x, y)$ переменных x и y: $\mu=\mu[\omega(x, y)]$. В этом случае уравнение (6) для интегрирующего множителя можно переписать так:

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega) \tag{18}$$

или (если $N\omega_x'-M\omega_y'\neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}. \tag{19}$$

Если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}\equiv\psi(\omega), \tag{20}$$

то

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)\, d\omega} \equiv f(\omega) = f[\omega(x, y)]. \tag{21}$$

Случаи интегрирующего множителя, зависящего только от x или только от y, содержатся в рассматриваемом случае при $\omega = x$, $\omega = y$. Пользуясь условием (20), мы можем найти условие существования интегрирующего множителя наперед заданного вида. Например, интегрирующий множитель, зависящий только от произведения xy $[\mu = \mu(xy)]$, существует, если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} \equiv \psi(xy) \text{ (здесь } \omega = xy). \tag{22}$$

Условие существования интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x + y)$ запишется так:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N - M} \equiv \psi(x + y) \quad (\omega = x + y) \tag{23}$$

и т. д.

59. Интегрирующий множитель и особые решения. *Зная интегрирующий множитель, мы можем найти не только общий интеграл уравнения, но также и все особые решения.* Действительно, пусть дано уравнение (1),

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0,$$

и известно, что $\mu = \mu(x, y)$ есть его интегрирующий множитель, так что

$$\mu(M\, dx + N\, dy) = dU. \tag{2'}$$

Тогда мы имеем:

$$M\, dx + N\, dy = \frac{1}{\mu}\, dU. \tag{24}$$

Поэтому данное уравнение (1) можно переписать так:

$$\frac{1}{\mu}\, dU = 0, \tag{25}$$

Это уравнение распадается на два:

$$dU = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0. \tag{26}$$

Первое из них приводит к общему интервалу $U = C$, а второе может привести к особому решению. Итак, *особым решением уравнения* (1) *может быть только такое решение, вдоль которого интегрирующий множитель обращается в бесконечность**.

* Т. е. такое решение, при приближении к которому $\mu \to \infty$.

Отсюда получается простое *правило нахождения особых решений:* 1) найти линии, вдоль которых μ обращается в ∞; 2) проверить, являются ли найденные линии интегральными кривыми, т. е. представляют ли они решения уравнения; 3) проверить, содержатся ли найденные решения в общем решении или нет. Те из найденных решений, которые не содержатся в общем решении, и будут особыми решениями. Если окажется, что μ не обращается в бесконечность (или обращается в бесконечность лишь в отдельных точках), то уравнение не имеет особых решений. Отсюда, в частности, опять получаем, что *линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ — непрерывная функция, не имеет особых решений,* так как его интегрирующий множитель (13) не обращается в бесконечность в промежутке непрерывности $p(x)$.

Исследуем при помощи интегрирующего множителя вопрос об особых решениях уравнения с разделяющимися переменными и однородного уравнения.

60. Интегрирующий множитель уравнения с разделяющимися переменными. Вспомним, как мы интегрировали уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)\ n(y)\ dx + m_1(x)\ n_1(y)\ dy = 0. \tag{27}$$

Мы умножали это уравнение на множитель

$$\mu = \frac{1}{n(y)\ m_1(x)}, \tag{28}$$

после чего получали уравнение

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}\ dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}\ dy = 0, \tag{29}$$

которое, очевидно, является уравнением в полных дифференциалах.

Следовательно, множитель (28) есть интегрирующий множитель уравнения (27) и мы, по существу, интегрировали в п. **21** уравнение с разделяющимися переменными методом интегрирующего множителя.

Из формулы (28) мы видим, что интегрирующий множитель μ обращается в бесконечность лишь вдоль прямых, параллельных осям координат, определяемых уравнениями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$ и, следовательно, только эти прямые и могут быть особыми решениями. Мы получили тот же результат, что и в п. **22**.

61. Интегрирующий множитель однородного уравнения. Рассмотрим однородное уравнение:

$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0, \tag{30}$$

где M и N — однородные функции одной и той же степени m. Применяя подстановку $y = zx$*, получаем:

$$M(x,\ zx)\ dx + N(x,\ zx)\ (zdx + xdz) = 0 \tag{31}$$

или

$$x^m M(1,\ z)\ dx + x^m N(1,\ z)\ (zdx + xdz) = 0. \tag{32}$$

Соберем вместе члены при dx и dz:

$$x^m [M(1,\ z) + N(1,\ z)\ z]\ dx + x^{m+1} N(1,\ z)\ dz = 0. \tag{33}$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Оно имеет, по предыдущему, интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{[M(1,\ z) + N(1,\ z)\ z]\ x^{m+1}}\ . \tag{34}$$

Отсюда, возвращаясь к переменным x и y, получаем интегрирующий множитель однородного уравнения в виде:

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny}\ ^{**}, \tag{35}$$

если $Mx + Ny \neq 0$. Если же $Mx + Ny \equiv 0$, то однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными вида $ydx - xdy = 0$.

Формула (35) дает возможность сразу получить все кривые, «подозрительные» на особое решение. Для этого достаточно решить уравнение $Mx + Ny = 0$. При этом мы получим те самые полупрямые, выходящие из начала координат, о которых шла речь в п. **25**.

Пример. Дано уравнение

$$(py - qx)\ dx - (px + qy)\ dy = 0. \tag{36}$$

Имеем:

$$\mu = \frac{1}{(py - qx)\ x - (px + qy)\ y} = -\frac{1}{q\ (x^2 + y^2)}; \tag{37}$$

$$-\frac{py - qx}{q\ (x^2 + y^2)}\ dx + \frac{px + qy}{q\ (x^2 + y^2)}\ dy = 0. \tag{38}$$

Сгруппируем члены так, чтобы каждая группа представляла собою полный дифференциал:

---

* См. п. **24**.

** Это следует из того, что $z = \dfrac{y}{x}$, $x^m M(1, z) = M(x, y)$, $x^m N(1, z) = N(x,\ y)$.

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \frac{p}{q}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0,$$

$$d\left[\frac{1}{2}\ \ln(x^2+y^2)\right] + d\left(\frac{p}{q}\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = 0. \tag{39}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\ \ln(x^2+y^2) + \frac{p}{q}\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln|C_1|.$$

Окончательно получаем:

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \quad (C = |C_1| > 0) \tag{40}$$

Особых решений нет, ибо μ не обращается в бесконечность ни на какой кривой.

§ 12. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

62. Теорема о существовании интегрирующего множителя. В предыдущем параграфе мы выяснили роль интегрирующего множителя для нахождения общего интеграла и особых решений уравнения

$$M(x,\ y)\ dx + N(x,\ y)\ dy = 0. \tag{1}$$

Мы указали также некоторые случаи легкого нахождения интегрирующего множителя. В настоящем параграфе мы изучаем общие свойства интегрирующего множителя и в заключение даем один общий способ нахождения интегрирующего множителя, основанный на использовании этих свойств.

В этом параграфе мы будем предполагать относительно функций $M(x,\ y)$ и $N\ (x,\ y)$, что они непрерывны вместе со всеми своими частными производными в некоторой односвязной области и ни в какой точке этой области не обращаются одновременно в нуль, а на интегрирующий множитель μ будем налагать те же ограничения, что и в предыдущем параграфе. Из этих предположений следует, что в каждой точке рассматриваемой области имеет место единственность решения задачи Коши и что интеграл $U\ (x,\ y)$, соответствующий интегрирующему множителю μ, имеет непрерывные частные производные второго порядка. Последнее вытекает из того, что если μ есть интегрирующий множитель уравнения (1), а $U(x,\ y)$ соответствующий ему интеграл, то

$$\mu\ (Mdx + Ndy) = dU,$$

а тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N,$$

и так как правые части имеют непрерывные частные производные по x и y, то производные от левых частей тоже существуют и непрерывны.

Докажем, что при некоторых условиях, гарантирующих существование общего интеграла*, существует и интегрирующий множитель.

Теорема. *Если уравнение (1) имеет общий интеграл*

$$U(x, y) = C, \tag{2}$$

где U есть интеграл уравнения (1) в рассматриваемой области, имеющий непрерывные частные производные второго порядка, то это уравнение имеет и интегрирующий множитель.

Действительно, так как $U(x, y)$ есть интеграл уравнения (1), то $dU \equiv 0$ в силу этого уравнения, т. е. мы имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = 0, \tag{3}$$

где dy определяется уравнением (1), так что dx и dy удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = 0, \\ Mdx + Ndy = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эта однородная линейная система имеет ненулевое решение (ибо dx, как дифференциал независимой переменной, произволен). Поэтому справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

или

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu(x, y). \tag{6}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N. \tag{7}$$

Поэтому:

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = dU, \tag{8}$$

т. е. левая часть уравнения (1) становится полным дифференциалом после умножения на функцию μ, определяемую равенством (6). Следовательно, μ есть интегрирующий множитель уравнения (1).

63. Теорема о неединственности интегрирующего множителя. Из уравнения для интегрирующего множителя μ (да и просто из самого определения интегрирующего множителя) ясно, что, если μ есть его интегрирующий множитель, то $C\mu$ (при

* См., напр., п. 138.

любом C) тоже будет интегрирующим множителем этого уравнения. Но совокупность интегрирующих множителей содержит и интегрирующие множители, отличные от $C\mu$. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если μ_0 есть интегрирующий множитель уравнения* (1), *а $U_0(x, y)$ соответствующий ему интеграл, то*

$$\mu = \mu_0 \varphi (U_0), \tag{9}$$

где φ — любая функция, не равная тождественно нулю и имеющая непрерывную производную, тоже является интегрирующим множителем уравнения (1). Действительно, умножая левую часть уравнения (1) на функцию (9), получаем:

$$\mu_0\varphi (U_0) \ (Mdx + Ndy) = \varphi (U_0) \ \mu_0 (Mdx + Ndy) =$$
$$= \varphi (U_0) \ dU_0 = d \int \varphi (U_0) \ dU_0. \tag{10}$$

Левая часть уравнения стала полным дифференциалом функции $\int \varphi (U_0) \ dU_0$; следовательно, функция μ, определяемая формулой (9), есть интегрирующий множитель уравнения (1).

64. Теорема об общем виде интегрирующего множителя и ее следствие. Формула (9) содержит бесчисленное множество интегрирующих множителей, порождаемых интегрирующим множителем μ_0 (и соответствующим ему интегралом). Возникает вопрос: содержатся ли все интегрирующие множители в формуле (9)? (Речь идет, разумеется, об интегрирующих множителях, определенных в одной и той же односвязной области, причем в этой области выполнены предположения относительно функций $M(x, y)$, $N(x, y)$ и интегрирующего множителя). Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Два любых интегрирующих множителя μ_0 и μ_1 уравнения* (1),

$$M (x, y) \ dx + N (x, y) \ dy = 0,$$

связаны соотношением (9):

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi (U_0).$$

Пусть U_0 и U_1 — интегралы, соответствующие интегрирующим множителям μ_0 и μ_1, т. е. мы имеем равенства:

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 (Mdx + Ndy) = dU_0, \\ \mu_1 (Mdx + Ndy) = dU_1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Деля второе из этих равенств на первое, получаем

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0}. \tag{12}$$

Так как, согласно теореме пункта **17**, имеем $U_1 = \Phi(U_0)$, причем Φ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Phi'(U_0)\,dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) = \varphi(U_0), \tag{13}$$

где $\varphi(U_0)$ имеет непрерывную производную*, откуда ясно, что μ_0 и μ_1 связаны соотношением (9). Теперь мы можем утверждать, что *все интегрирующие множители уравнения* (1) *содержатся в формуле* (9). Заметим, что в этой формуле мы можем заменить интеграл U_0 любым интегралом U, ибо любой интеграл уравнения является функцией от U_0, а функция φ все равно произвольна, так что $\varphi(U)$ будет произвольной функцией от U_0.

Следствие. *Если μ_0 и μ_1 — два существенно различных интегрирующих множителя** уравнения (1), то равенство*

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = C \tag{14}$$

является общим интегралом уравнения (1).

В самом деле, согласно формуле (9), мы имеем:

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \varphi(U_0). \tag{15}$$

Но в силу замечания 2 п. **16** равенство $\varphi(U_0) = C$ есть общий интеграл уравнения (1), а тогда и (14) есть общий интеграл этого уравнения.

В частности, *если уравнение* (1) *есть уравнение в полных дифференциалах и известен интегрирующий множитель μ_1, отличный от постоянной, то $\mu_1 = C$ есть общий интеграл этого уравнения,* так как за μ_0 можно взять 1. Например, если уравнение (1) однородное и в полных дифференциалах, то его общий интеграл дается равенством

$$M(x, y)\cdot x + N(x, y)\cdot y = C, \tag{16}$$

если только левая часть этого равенства не обращается тождественно в постоянную величину.

Пример 1. Дано уравнение

$$xdy - ydx = 0. \tag{17}$$

Здесь $\mu_0 = \dfrac{1}{xy}$, $\mu_1 = \dfrac{1}{x^2}$, поэтому $\dfrac{y}{x} = C$ — общий интеграл.

Пример 2.

$$(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0. \tag{18}$$

Это уравнение однородное и в полных дифференциалах. Поэтому $(x + y)x + (x - y)y = C$ или $x^2 + 2yx - y^2 = C$ есть общий интеграл.

---

* Это следует из того, что $\Phi''(U_0)$ существует и непрерывна, так как U_0 и U_1 имеют непрерывные частные производные второго порядка и являются интегралами уравнения (1).

** Т. е. их отношение не равно тождественно постоянной.

65. Один общий способ нахождения интегрирующего множителя. Предположим, что левую часть уравнения (1) можно разбить на две группы:

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0, \tag{19}$$

причем так, чтобы для каждой группы можно легко найти интегрирующий множитель. Пусть μ_1 и μ_2 — эти множители, а U_1 и U_2 — соответствующие им интегралы. Тогда, согласно (9), все интегрирующие множители первой группы содержатся в формуле

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1), \tag{20}$$

а все интегрирующие множители второй группы — в формуле

$$\mu = \mu_2 \psi(U_2). \tag{21}$$

Если удастся выбрать произвольные функции φ и ψ так, чтобы

$$\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2) \tag{22}$$

(причем одну из функций φ и ψ можно полагать равной единице), то

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2)$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения (1). Заметим, что группы, на которые мы разбиваем левую часть уравнения (1), не обязательно должны быть полными, т. е. содержать и dx и dy.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0. \tag{23}$$

Разобьем левую часть на две группы:

$$\left(\frac{y}{x}\, dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}\, dy\right) = 0. \tag{24}$$

Находим для каждой группы интегрирующие множители и соответствующие им интегралы:

$$\mu_1 = x, \quad U_1 = xy; \quad \mu_2 = y, \quad U_2 = x^3y. \tag{25}$$

Условие (22) принимает вид

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3y). \tag{26}$$

Возьмем $\varphi(U) = U^2$, $\psi(U) = U$, тогда $x(xy)^2 = y(x^3y) = x^3y^2$. Следовательно, $\mu = x^3y^2$. Умножая данное уравнение (23) на найденный интегрирующий множитель и используя формулу (23) п. 53, полагая в ней $x_0 = 0$, найдем общий интеграл:

$$\int_0^x (x^2y^3 + 3x^5y^2)\, dx = C, \quad \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = C. \tag{27}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

66. Общий случай уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Рассмотрим уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Эти уравнения имеют следующий общий вид:

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

Наиболее важным частным случаем таких уравнений являются уравнения, в которых левая часть представляет собою полином относительно y' с коэффициентами, зависящими от x и y:

$$y'^n + A_1(x,\ y)\ y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x,\ y)\ y' + A_n(x,\ y) = 0. \tag{1'}$$

Уравнение такого вида называется *уравнением первого порядка n-й степени.*

Всякая функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в некотором интервале $(a,\ b)$*, называется *решением* уравнения (1) в этом интервале, если она обращает уравнение (1) в тождество**

$$F[x,\ y(x),\ \ y'(x)] = 0, \tag{2}$$

справедливое при всех значениях x из интеграла $(a,\ b)$.

Если уже при интегрировании уравнения, разрешенного относительно производной, мы далеко не во всех случаях могли найти решение в явной форме, то для уравнения (1) эти случаи представляют и тем более редкое исключение. Поэтому мы будем чаще всего искать решение в неявной или даже параметрической форме.

---

* См. сноски на стр. 14.

** См. сноску на стр. 7.

Будем говорить, что уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{3}$$

определяет в неявной форме решение уравнения (1), если оно определяет y как неявную функцию от x и если эта последняя является решением уравнения (1). Далее будем говорить, что уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{4}$$

определяют решение уравнения (1) в параметрической форме в интервале (t_0, t_1), если в этом интервале имеет место тождество

$$F\left[\varphi(t), \quad \psi(t), \quad \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \equiv 0. \tag{5}$$

Кривую на плоскости (x, y), соответствующую решению, будем называть *интегральной кривой* уравнения (1).

Предположим, что уравнение (1) определяет в каждой точке (x, y) некоторой области одно или несколько вещественных значений y'. Построив в каждой точке (x, y) этой области отрезки [для определенности будем считать, что это единичные отрезки и что середины их лежат в точке (x, y)], наклон которых к оси Ox определяется значениями y' в этой точке*, мы получим так называемое *поле направлений***. Задача интегрирования уравнения (1) состоит в том, чтобы найти все гладкие кривые, в каждой точке которых направление касательной совпадало бы с одним из направлений поля в этой точке.

Одной из важнейших задач интегрирования уравнения (1) является так же, как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной, *задача Коши* — задача нахождения решений, принимающих начальное значение y_0 при $x = x_0$, что соответствует нахождению интегральных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0).

Будем говорить, что *решение задачи Коши с начальными данными* x_0, y_0 *единственно,* если через точку (x_0, y_0) в достаточно малой окрестности ее проходит столько интегральных кривых, сколько направлений поля определяет уравнение (1) в этой точке. В противном случае будем говорить, что рассматриваемая *задача Коши имеет не единственное решение.*

Поставим вопрос: каким условиям достаточно подчинить функцию $F(x, y, y')$, чтобы через заданную точку (x_0, y_0) в за-

---

* Т. е. мы проводим отрезки, образующие с осью Ox угол, тангенс которого равен значению y' в этой точке. Каждому значению y' соответствует свой отрезок.

** Ср. п. **4**.

данном направлении y'_0 проходила одна и только одна интегральная кривая уравнения (1). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Если функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) *$F(x, y, y')$ определена и непрерывно дифференцируема вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0);*

2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$,

то уравнение (1) *имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x = x_0$, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ и такое, что $y'(x_0) = y'_0$.*

Действительно, согласно теореме о существовании неявной функции от нескольких переменных*, уравнение (1) при сделанных предположениях определяет y' как однозначную функцию от x и y: $y' = f(x, y)$, которая будет задана и непрерывно дифференцируема в некоторой замкнутой окрестности точки (x_0, y_0), причем $f(x_0, y_0) = y'_0$.

Применяя к уравнению $y = f(x, y)$ с начальными данными x_0, y_0 теорему Пикара, сформулированную в п. 7, можем утверждать, что оно имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Так как при этом

$$y'(x_0) = f[x_0, y(x_0)] = f(x_0, y_0) = y'_0,$$

т. е. $y'(x_0) = y'_0$, то найденное решение $y = y(x)$ и является искомым решением уравнения (1).

Предположим, что разрешая уравнение (1) относительно y', мы найдем конечное число **вещественных** решений:

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

где функции $f_k(x, y)$ определены в некоторой области D, так что мы имеем m уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Пусть во всякой точке (x, y) области D направления поля, определяемые каждым из уравнений (6), различны, так что интегральные кривые различных уравнений (6) не могут касаться друг друга внутри области D. Предположим,

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II М., Физматгиз, 1956, п. **316**.

что для каждого из уравнений (6) задача Коши в области D имеет единственное решение и что каждое из уравнений (6) имеет в области D общий интеграл:

$$\psi_k(x, y) = C \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Совокупность этих общих интегралов будем называть *общим интегралом уравнения* (1) в области D*.

Иногда вместо равенств (7) пишут равносильное им одно равенство

$$[\psi_1(x, y) - C][\psi_2(x, y) - C] \ldots [\psi_m(x, y) - C] = 0, \tag{8}$$

так что в рассматриваемом случае левая часть общего интеграла представляет собою полином степени m относительно произвольной постоянной C.

При сделанных предположениях поле направлений, определяемое уравнением (1), представляет собою результат наложения полей направлений, определяемых уравнениями (6), а семейство интегральных кривых, образующих общий интеграл (8), есть наложение семейств интегральных кривых, образующих общие интегралы (7). В каждой точке (x, y), лежащей внутри области D имеет место единственность решения задачи Коши.

Если уравнение (1) разрешимо относительно y', т. е. оно распадается на уравнения вида (6), но поля, определяемые этими уравнениями не удовлетворяют сделанному выше предположению, так что существует хоть одна точка (x_0, y_0) такая, что значения хотя бы двух из функций $f_k(x, y)$ в этой точке совпадают, то интегральные кривые соответствующих уравнений касаются друг друга в точке (x_0, y_0). Вследствие этого интегральными кривыми уравнения (1), кроме интегральных кривых уравнений (6) будут также и кривые, составленные из интегральных кривых упомянутых выше уравнений путем склейки их в точке (x_0, y_0), переходя в ней с интегральной кривой одного из этих уравнений на интегральную кривую другого уравнения**. В рассматриваемом случае общий интеграл опять записывается в виде (7) или (8).

В общем случае уравнения (1) нам не удастся разрешить его относительно y' в элементарных функциях. Тогда мы будем предполагать, что уравнение (1) определяет y' как неявную функцию от x и y.

---

* Это определение общего интеграла распространяется и на случай, когда уравнение (1) имеет бесконечное число вещественных решений вида (6).

** См. п. 67, пример 2.

В таком случае (а иногда это целесообразно даже если уравнение (1) и разрешимо относительно y') ищут однопараметрическое семейство интегральных кривых в виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{9}$$

Такое семейство интегральных кривых называется *общим интегралом* уравнения (1). Если семейство интегральных кривых задано в виде, разрешенном относительно y:

$$y = \varphi(x,C), \tag{9'}$$

то оно называется *общим решением* уравнения (1).

Заметим, что в формулу общего интеграла (9) могут входить и решения уравнений вида (6), где y' — комплексное*. Мы не рассматриваем здесь такие уравнения. Поэтому соответствующие им решения нужно исключить из формулы (9).

Иногда ограничиваются тем, что находят однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения (1) в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, C), \\ y &= \psi(t, C). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением уравнения* (1) *в параметрической форме*.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) будем называть *частным решением,* если в каждой его точке задача Коши имеет единственное решение.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) будем называть *особым решением,* если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Так же как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной, уравнение (1) может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми**.

Вопрос о связи частного и особого решений с формулой общего интеграла для уравнения (1) является более сложным, чем для уравнения, разрешенного относительно производной.

Если уравнение (1) распадается на уравнения (6), причем правые части последних уравнений удовлетворяют в области D условиям существования и единственности решения задачи Коши и во всякой точке области D направления поля, определяемые каждым из этих уравнений, различны, то частное решение $y = \varphi(x)$, лежащее внутри области D, содержится в общем интеграле (8) при некотором числовом значении произвольной постоянной C, и обратно, всякое такое решение будет частным.

---

* См. п. **70**.

** Ср. п. **11**.

Интегральные кривые, соответствующие частным решениям, не касаются друг друга внутри области D.

Если мы ограничиваемся формальным определением общего интеграла как однопараметрического семейства интегральных кривых (9) без дополнительных предположений относительно функции Φ, то может случиться, что частное решение $y = \varphi(x)$ получается из формулы общего интеграла при переменном значении C, $C = C(x)$, и особое решение может получаться из формулы общего интеграла при конкретном числовом значении произвольной постоянной C.

То же самое относится и к случаю, когда общее решение найдено в параметрической форме.

Отметим один достаточный признак особого решения уравнения (1). Он относится к случаю, когда это уравнение распадается на уравнения, разрешенные относительно производной. В этом случае решение $y = y(x)$ уравнения (1) будет, наверное, особым решением этого уравнения, если оно будет особым решением хотя бы для одного из уравнений, на которые оно распадается.

67. Примеры.

Пример 1. Возьмем уравнение

$$y'^2 + (y^2 - 1)\, y' - y^2 = 0. \tag{11}$$

Оно распадается на два уравнения

$$y' = 1, \quad y' = -y^2. \tag{12}$$

Правые части этих уравнений определены на всей плоскости (x, y), причем ни в одной точке их значения не совпадают. Поэтому поле, определяемое уравнением (11), представляет собой наложение полей, определяемых уравнениями (12).

Общими решениями уравнений (12) на всей плоскости (x, y) соответственно будут

$$y = x + C, \quad y = \frac{1}{x + C}. \tag{13}$$

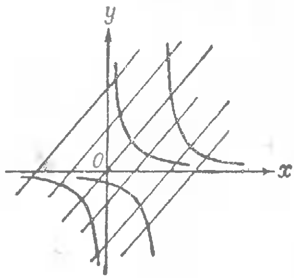


Рис. 22

Совокупность этих общих решений и дает общий интеграл уравнения (11) на всей плоскости (x, y). Его можно записать и в виде одного соотношения:

$$(y - x - C)\left(y - \frac{1}{x + C}\right) = 0. \tag{14}$$

Этот общий интеграл представляет собою наложение семейств интегральных кривых (13) (рис. 22).

Решение задачи Коши для уравнения (11) в каждой точке плоскости (x, y) единственно: в точке (x_0, y_0) мы имеем два направления поля $y_0' = 1$, $y_0' = -y_0^2$ и через нее проходят точно две интегральные кривые:

$$y = x + y_0 - x_0 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0} - x_0}, \quad \text{если} \quad y_0 \neq 0 \tag{15}$$

или

$$y = x - x_0 \quad \text{и} \quad y = 0, \quad \text{если } y_0 = 0 \tag{16}$$

Решения (15) и (16) суть частные решения. Особых решений нет.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'^2 - 2xy' = 0. \tag{17}$$

Разрешая относительно y', находим два уравнения

$$y' = 0, \; y' = 2x. \tag{18}$$

Заметим, что хотя поля, определяемые этими уравнениями, так же как и уравнениями (12) в предыдущем примере, заданы на всей плоскости (x, y), мы не имеем здесь наложения полей, ибо в точках оси $Oy (x = 0)$ направления этих полей совпадают.

Совокупность общих интегралов уравнений (18):

$$y = C, \quad y - x^2 = C \tag{19}$$

или равносильное этой совокупности одно равенство

$$(y - C)\,(y - x^2 - C) = 0 \tag{20}$$

и дает общий интеграл уравнения (17) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \tag{21}$$

и

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \tag{22}$$

В каждой из областей (21) и (22) общий интеграл (20) представляет собою наложение двух семейств кривых: прямых $y = C$ и парабол $y = x^2 + C$ (рис. 23).

Возьмем любую точку $M_0(x_0, y_0)$, не лежащую на оси Oy, например, любую точку из области (22), т. е. справа от оси Oy. В этой точке мы имеем два направления поля: $y'_0 = 0$ и $y'_0 = 2x_0$ и в достаточно малой окрестности этой точки через нее проходят две интегральные кривые

$$\begin{aligned} &\text{I} \;\; y = y_0, \\ &\text{II} \;\; y = x^2 + y_0 - x_0^2, \end{aligned} \tag{23}$$

причем каждому из направлений поля соответствует одна интегральная кривая, т. е., согласно сказанному выше, мы имеем дело со случаем единственности решения задачи Коши.

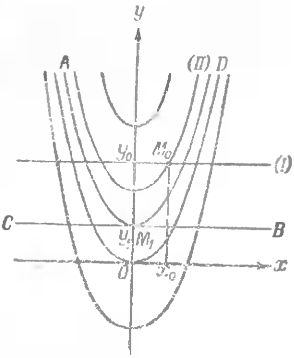


Рис. 23

Единственность решения задачи Коши нарушена только в точках оси $Oy (x = 0)$: в то время как в каждой точке $M_1(0, y_1)$ оси Oy направление поля одно, $y'_0 = 0$, через эту точку в любой сколь угодно малой окрестности ее проходит не одна интегральная кривая. А именно через эту точку проходят интегральные кривые:

$$y = y_1 \quad \text{и} \quad y = x^2 + y_1.$$

Кроме того, через нее проходит интегральная кривая AM_1B:

$$y = \begin{cases} x^2 + y_1, & -\infty < x \leqslant 0, \\ y_1, & 0 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

и еще интегральная кривая CM_1D:

$$y = \begin{cases} y_1, & -\infty < x \leqslant 0, \\ x^2 + y_1, & 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

(Здесь мы имеем склейку частных решений в точке неединственности.) Таким образом, в каждой точке оси Oy нарушается единственность решения задачи Коши. Однако, ось $Oy (x = 0)$ не является интегральной кривой уравнения (17), так что это уравнение не имеет особых решений.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y'^3 - 1 = 0. \tag{24}$$

Разрешая относительно y', получаем:

$$y' = 1, \quad y' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad y' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \tag{25}$$

Так как нас интересуют лишь вещественные значения y', то мы должны рассматривать только первое из полученных уравнений, из которого находим (вещественное!) общее решение данного уравнения в виде $y = x + C$.

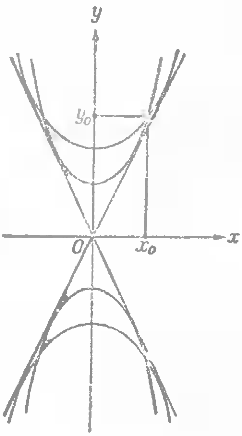


Рис. 24

Пример 4. Дано уравнение

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0. \tag{26}$$

Разрешая относительно y', получаем два положительно однородных уравнения:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x} \quad (y^2 - 4x^2 \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0)^*. \tag{27}$$

Положим $y = zx$, тогда

$$z'x = \pm\sqrt{z^2 - 4}, \quad \frac{dz}{\pm\sqrt{z^2 - 4}} = \frac{dx}{x} \quad (x = 0,$$

$$\sqrt{z^2 - 4} = 0?). \tag{28}$$

Интегрируя, находим

$$z \pm \sqrt{z^2 - 4} = Cx. \tag{29}$$

Освобождаясь от иррациональности и возвращаясь к переменной y, получим семейство парабол (рис. 24):

$$C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0. \tag{30}$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения в каждой из областей:

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 4x^2 > 0, \quad & y > 0; \\ y^2 - 4x^2 > 0, \quad & y < 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Действительно, в каждой точке (x_0, y_0), лежащей внутри любой из областей (31), уравнение (26) задает два направления поля

$$y_0' = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0^2}}{x_0} \tag{32}$$

* Мы исключаем точку $x = 0$, $y = 0$, так как в ней поле не определено.

и через каждую такую точку в достаточно малой окрестности ее проходят в точности две интегральные кривые семейства (30). Таким образом, в каждой точке, лежащей внутри любой из областей (31), имеет место единственность решения задачи Коши. Интегральные кривые семейства (30) не касаются друг друга. Они представляют собою частные решения.

Из равенств $x = 0$, $\sqrt{z^2 - 4} = 0$ следует, что мы могли потерять решения $x = 0\,(y \neq 0)$ и $y = \pm 2x\,(x \neq 0)$. Нетрудно видеть, что полуоси оси Oy являются частными решениями уравнения (26), ибо они являются решениями этого уравнения и в каждой точке любого из них имеет место единственность решения задачи Коши. В самом деле в точке $(0, y_0)$, где $y_0 \neq 0$, имеется два направления поля $y_0' = 0$, $y_0' = \infty$ и через нее проходят две интегральные кривые: $x^2 = y_0(y - y_0)$ и $x = 0(y \neq 0)$.

Полупрямые $y = \pm 2x\,(x \neq 0)$ являются решениями уравнения (26) и притом особыми, ибо в каждой точке любого из них нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, в точке (x_0, y_0) на решении $y = 2x$ $(x \neq 0)$ уравнение (26) задает одно направление поля, $y_0' = 2$, в то время как через эту точку в любой сколь угодно малой окрестности ее проходит не одна интегральная кривая, а именно, само решение $y = 2x$ $(x \neq 0)$, парабола $y = \frac{x^2}{x_0} + x_0$, содержащаяся в общем интеграле (30) при $C = \frac{2}{x_0}$, и бесчисленное множество решений, склеенных из отрезков решения $y = 2x$ $(x \neq 0)$ и парабол.

Заметим, что решения $y = \pm 2x\,(x \neq 0)$ являются особыми для каждого из уравнений (27), на которые распадается уравнение (26)

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$y'^3 - 4yy' = 0. \tag{33}$$

Это уравнение распадается на три:

$$y' = 0, \quad y' = 2\sqrt{y}, \quad y' = -2\sqrt{y}. \tag{34}$$

Общим решением первого уравнения на всей плоскости (x, y) будет

$$y = C. \tag{35}$$

Интегрируя второе из уравнений (34), имеем:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx\ (\sqrt{y} = 0?), \quad \sqrt{y} = x + C, \quad x + C > 0, \tag{36}$$

так что

$$\sqrt{y} - x = C \tag{37}$$

будет общим интегралом этого уравнения в верхней полуплоскости.

Аналогично находим, что

$$\sqrt{y} + x = C \tag{38}$$

будет общим интегралом третьего из уравнений (34) в верхней полуплоскости.

Второе и третье из уравнений (34) имеют особое решение $y = 0$.

Совокупность общих интегралов (35), (37) и (38) представляет собою общий интеграл рассматриваемого уравнения (33) в верхней полуплоскости. Его можно записать и в виде одного равенства

$$(y - C)(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0. \tag{39}$$

Общий интеграл (39) представляет собою наложение трех семейств интегральных кривых уравнений (34). В каждой точке (x_0, y_0) верхней полуплоскости мы имеем три направления поля: $y_0' = 0$, $y_0' = 2\sqrt{y_0}$, $y_0 = -2\sqrt{y_0}$ и через эту точку в достаточно малой окрестности ее проходят три интегральные кривые (рис. 25):

$$\begin{aligned} &y = y_0, \\ &y = (x + \sqrt{y_0} - x_0)^2, \quad x > x_0 - \sqrt{y_0}, \\ &y = (x - \sqrt{y_0} - x_0)^2, \quad x < \sqrt{y_0} + x_0. \end{aligned} \tag{40}$$

Прямая $y = 0$ (ось Ox) является **особым** решением уравнения (33), так как она является особым решением для второго и третьего из уравнений (34).

Заметим, что особое решение $y = 0$ получается из формулы общего интеграла (39) не только при $C = -x$, $C = x$, но и при числовом значении C, а именно при $C = 0$. Это объясняется тем, что для одного из уравнений (34), на которые распадается уравнение (33), а именно для уравнения $y' = 0$, решение $y = 0$ будет **частным**.

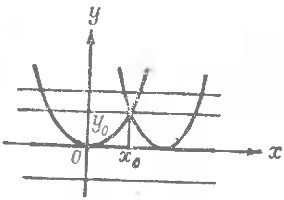


Рис. 25

68. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение, по дифференциальному уравнению. В п. 12 мы показали, как по виду правой части дифференциального уравнения, **разрешенного относительно производной**,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

можно найти кривые, подозрительные на особое решение, в предположении, что правая часть этого уравнения непрерывна и имеет частную производную по y (конечную или нет). Напомним, что кривыми, подозрительными на особое решение, мы назвали кривые, вдоль которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ **не ограничена**. Тот же вопрос естественно поставить и для уравнения (1),

$$F(x, y, y') = 0,$$

не разрешенного относительно производной.

Предположим, что это уравнение определяет конечное или бесконечное число вещественных значений y':

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{41}$$

и, что все функции $f_k(x, y)$ непрерывны и имеют частные производные по y. Тогда, применив к каждому из уравнений (41) рассуждения пункта 12, мы нашли бы все кривые, подозрительные на особые решения этих уравнений. Это — кривые, вдоль которых $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ обращаются в бесконечность. Эти кривые будут подозрительными и на особое решение уравнения (1).

Однако в фактическом разрешении уравнения (1) относительно производной нет необходимости, ибо интересующую нас частную производную

$$\frac{\partial f_k}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} \tag{42}$$

можно найти и непосредственно из уравнения (1). В самом деле, дифференцируя уравнение (1) по y (в предположении, что существуют $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$), получаем,

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = 0, \tag{43}$$

откуда

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{44}$$

Производная $\frac{\partial y'}{\partial y}$ (в предположении, что $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля) будет неограничена, если

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{45}$$

Это условие нужно рассматривать совместно с уравнением (1), ибо нас интересуют не всякие кривые, вдоль которых $\frac{\partial y'}{\partial y}$ не ограничена, а лишь **интегральные** кривые уравнения (1). следовательно, *кривые подозрительные на особое решение, могут быть найдены исключением y' из системы:*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

В результате исключения y' из системы (46) мы получим, вообще говоря, некоторую кривую

$$R(x, y) = 0. \tag{47}$$

Эта кривая называется *дискриминантной кривой дифференциального уравнения* (1). Чтобы дискриминантная кривая (или ее часть) была особым решением уравнения (1), нужно, чтобы она была решением этого уравнения и чтобы в каждой точке ее нарушалась единственность решения задачи Коши*.

Рассмотрим частный случай уравнения (1), когда это уравнение является **квадратным** относительно y':

$$F(x, y, y') \equiv y'^2 + 2P(x, y)\,y' + Q(x, y) = 0. \tag{48}$$

---

* Подробное исследование дискриминантной кривой для случая уравнения n-й степени см. в книге: Б. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 125 — 132.

Исключая y' из системы:

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv y'^2 + 2P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &\equiv 2y' + 2P(x, y) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

получаем:

$$R \equiv P^2(x, y) - Q(x, y) = 0, \tag{50}$$

так что дискриминантная кривая дифференциального уравнения (48) есть геометрическое место точек (50), в которых дискриминант уравнения (48) (как квадратного уравнения относительно y') равен нулю.

В каждой точке дискриминантной кривой (50) мы имеем одно направление поля*, определяемое равенством

$$y' = -P(x, y), \tag{51}$$

в то время как через нее может пройти не одна интегральная кривая.

Пример 1. Для уравнения

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0 \tag{52}$$

дискриминантной кривой будет

$$y^2 - 4x^2 = 0. \tag{53}$$

Она распадается на две прямые

$$y = \pm 2x. \tag{54}$$

Каждая из полупрямых $y = \pm 2x$ $(x \neq 0)$ является решением уравнения (52) и притом особым, в чем мы уже убедились в примере 4 предыдущего пункта.

Пример 2. В случае уравнения

$$y'^2 - 2xy' + y = 0 \tag{55}$$

дискриминантная кривая $y = x^2$ не является особым решением, ибо она не является интегральной кривой этого уравнения.

Пример 3. Для уравнения

$$y'^2 - 2xy' - y^2 = 0 \tag{56}$$

дискриминантная кривая $x^2 + y^2 = 0$ вырождается в одну точку $x = 0$, $y = 0$, так что здесь мы не получаем кривой, подозрительной на особое решение.

69. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение. Пусть дано семейство интегральных кривых уравнения (1) в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } y = \varphi(x, C). \tag{57}$$

---

* Ибо равенство $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ вместе с уравнением (48) есть условие кратности корня квадратного уравнения (48) относительно y'.

Предположим, что это семейство имеет огибающую*. Так же, как и в случае уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, эта *огибающая будет решением уравнения* (1) *и притом особым.* Действительно, в каждой точке ее направление касательной совпадает с одним из направлений поля, определяемым уравнением (1) в этой точке, вследствие чего огибающая является интегральной кривой. Кроме того, в каждой точке огибающей нарушается единственность решения задачи Коши в смысле, указанном в п. **66**, ибо через каждую точку огибающей проходит бóльшее число интегральных кривых, чем число направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0. \tag{58}$$

Мы уже показали в примере 4 пункта **67**, что уравнение (58) имеет семейство интегральных кривых

$$C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0. \tag{59}$$

Найдем огибающую этого семейства. Для этого ищем дискриминантную кривую семейства (59). Согласно п. **14**, имеем:

$$\left.\begin{aligned} C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0,\\ 2Cx^2 - 2y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Из второго уравнения находим $C = \dfrac{y}{x^2}$ $(x \neq 0)$ и, подставляя в первое, получаем: $y^2 - 4x^2 = 0$ $(x \neq 0)$. Эта дискриминантная кривая распадается на полупрямые $y = \pm 2x$ $(x \neq 0)$, каждая из которых является огибающей, соответствующей части семейства интегральных кривых (59), как это видно непосредственно из рис. 24.

В следующих параграфах мы ограничиваемся изложением приемов нахождения семейств интегральных кривых, зависящих от одной произвольной постоянной C, так что речь будет идти главным образом о технике интегрирования уравнений, принадлежащих к тому или иному типу.

§ 2. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

70. Уравнение, содержащее только производную. Естественно ожидать, что задача интегрирования уравнения (1) п. **66** облегчается, если левая часть этого уравнения не содержит аргумента x или искомой функции y, или того и другого вместе. Такие уравнения будем называть *неполными.* Простейшим из них является уравнение, содержащее только производную:

$$F(y') = 0. \tag{1}$$

* Определение огибающей и способ нахождения ее см. в п. **14**.

Предположим, что это уравнение имеет некоторое (конечное или бесконечное) число вещественных решений:

$$y' = k_i \, (i = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где k_i — некоторые постоянные, так что мы имеем тождества

$$F(k_i) = 0 \, (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Интегрируя уравнения (2), мы находим:

$$y = k_i x + C, \tag{4}$$

откуда

$$k_i = \frac{y - C}{x}. \tag{5}$$

Подставляя это значение k_i в тождества (3), мы придем к одному соотношению

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0. \tag{6}$$

Это соотношение и является общим интегралом уравнения (1).

Таким образом, при сделанном предположении интегральные кривые уравнения (1) образуют семейство прямых линий (4), которое может быть записано в виде одного уравнения (6).

При этом в формулу (6) могут войти решения комплексных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим снова уравнение примера 3 п. **67**,

$$y'^3 - 1 = 0. \tag{1'}$$

Согласно (6) его общим интегралом является

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 1 = 0. \tag{6'}$$

Однако сюда, кроме вещественного общего решения*

$$y = x + C, \tag{4'}$$

входят решения комплексных дифференциальных уравнений:

$$y' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad y' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

Замечание. Если корни уравнения (1) заполняют сплошь некоторый интервал, то, как недавно показал Ю. С. Богданов**, дифференциальное уравнение (1) может иметь решения, отличные от указанных выше.

---

* См. п. **67**, пример 3.

** Ю. С. Богданов. О простейшем неполном дифференциальном уравнении. ДАН БССР, том V, № 10, 1961. В этой работе найдены все решения уравнения (1) при произвольной функции F.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y' + |y'| = 0, \qquad (1'')$$

Решая это уравнение относительно y', имеем:

$$y' = k\ (-\infty < k \leqslant 0),$$

так что корни уравнения $(1'')$ заполняют сплошь интервал $(-\infty,\ 0)$. Интегральными кривыми уравнения $(1'')$ будут п р я м ы е

$$y = kx + C\ (-\infty < k \leqslant 0). \qquad (4'')$$

Кроме того, решением уравнения $(1'')$ будет, например, функция

$$y = -x^2\ (0 \leqslant x < +\infty),$$

которая, очевидно, не входит в семейство $(4'')$.

71. Уравнение, не содержащее искомой функции. Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,\ y') = 0, \qquad (7)$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', так что

$$y' = f_k(x)\ \ (k = 1,\ 2, \ldots), \qquad (8)$$

то совокупность общих решений уравнений (8), т. е.

$$y = \int f_k(x)\,dx + C \quad (k = 1,\ 2, \ldots) \qquad (9)$$

дает о б щ и й и н т е г р а л уравнения (7).

Интегральными кривыми уравнения (7) будут также кривые, склеенные из интегральных кривых уравнений (8).

Предположим теперь, что уравнение (7) не разрешимо (в элементарных функциях) относительно y', но можно найти такие элементарные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что

$$F[\varphi(t),\ \psi(t)] \equiv 0. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$x = \varphi(t),\ \ y' = \psi(t). \qquad (11)$$

В таком случае будем говорить, что уравнение (7) допускает *параметрическое представление* (11).

Для нахождения общего решения уравнения (7) заметим, что вдоль всякой интегральной кривой любого дифференциального уравнения первого порядка должно выполняться *основное соотношение*

$$dy = y'\,dx. \qquad (12)$$

Пользуясь этим соотношением и параметрическим представлением уравнения (7), нетрудно найти общее решение этого уравнения в параметрической форме. Параметрическое выражение для x мы уже имеем: $x = \varphi(t)$. Найдем параметрическое выражение для y. Для этого заменим в основном соотношении (12) y' и dx их значениями из формул (11): $y'=\psi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Получаем:

$$dy = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{13}$$

Интегрируя, находим:

$$y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{14}$$

Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{15}$$

Иногда удается исключить из уравнений (15) параметр t, и тогда мы получаем общее решение (общий интеграл) в обычной форме.

Если существует такое конечное число a, при котором

$$\lim_{y' \to +\infty} F(a,\ y') = 0 \ \text{ или } \lim_{y' \to -\infty} F(a,\ y') = 0, \tag{16}$$

то $x = a$ есть решение уравнения (7). Это решение может оказаться особым.

Если уравнение (7) разрешимо относительно x, т. е. если его можно переписать в виде

$$x = \varphi(y'), \tag{17}$$

то, положив $y' = \psi(t)$, получаем параметрическое представление:

$$x = \varphi[\psi(t)], \quad y' = \psi(t). \tag{18}$$

В частности, полагая $y' = t$, будем иметь:

$$x = \varphi(t), \quad y' = t. \tag{19}$$

Поэтому формулы (15) заменяются, в последнем случае, следующими:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{20}$$

Обращаем внимание читателя на то, что при интегрировании уравнения вида (17) не всегда целесообразно принимать именно y' за параметр, т. е. использовать параметрическое представление (19). Во многих случаях уравнение (17) интегрируется проще, если воспользоваться более общим параметрическим представлением (18), подобрав удачным образом функцию $\psi(t)$. Уравнение (17) может иметь особые решения вида $x = a$, где a таково, что

$$\lim_{y' \to +\infty} \varphi(y') = a, \quad \text{ или } \lim_{y' \to} \varphi(y') = a. \tag{21}$$

Замечание 1. Практически нет необходимости пользоваться формулами (15) или (20). *Общее решение всегда получается из параметрического представления уравнения непосредственным использованием основного соотношения* (12). Это замечание относится и ко всем дальнейшим случаям построения общего решения в параметрической форме.

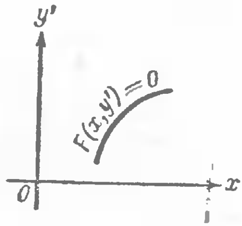


Рис. 26

Замечание 2. Если рассматривать x и y' как прямоугольные координаты точки на плоскости (x, y'), то уравнению (7) соответствует на плоскости (x, y') некоторая кривая (рис. 26), а формулы (11) представляют параметрические уравнения этой кривой. Поэтому задача нахождения параметрического представления уравнения (7) равносильна задаче нахождения параметрических уравнений соответствующей плоской кривой. Последняя задача решается очень просто, если уравнение кривой разрешимо относительно одной из координат. Отметим еще один случай, когда эта задача решается легко. Это тот случай, когда уравнение кривой (7) можно представить в виде

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0, \tag{22}$$

где $P(x, y')$ и $Q(x, y')$ — однородные функции x и y' соответственно k-го и m-го измерений. Перепишем уравнение (22) так:

$$x^k P\left(1, \frac{y'}{x}\right) + x^m Q\left(1, \frac{y'}{x}\right) = 0.$$

Отсюда (считая $k > m$) имеем:

$$x^{k-m} = -\frac{Q\left(1, \frac{y'}{x}\right)}{P\left(1, \frac{y'}{x}\right)}, \quad x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q\left(1, \frac{y'}{x}\right)}{P\left(1, \frac{y'}{x}\right)}}.$$

Полагая

$$y' = t x, \tag{23}$$

находим:

$$x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}, \quad y' = t\sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}. \tag{24}$$

Если, в частности, $k - m = 1$, а $P(x, y')$ и $Q(x, y')$ суть полиномы, то получаем рациональное параметрическое задание кривой (22)* и тем самым рациональное параметрическое представление соответствующего ей дифференциального уравнения.

Практически нужно сразу в уравнении (22) делать подстановку (23) и, найдя из полученного уравнения выражение x через t, $x = \varphi(t)$, подставить его в (23), после чего мы получим выражение y' через t, $y' = t\varphi(t)$, что вместе с $x = \varphi(t)$ и даст параметрическое представление уравнения (22).

Пример 1. Дано уравнение

$$x = e^{y'} - y'. \tag{25}$$

Представим это уравнение в параметрической форме:

$$x = e^t - t, \quad y' = t. \tag{26}$$

Отсюда

$$dy = y'\,dx = t\,(e^t - 1)\,dt, \;\; y = \int t\,(e^t - 1)\,dt + C = (t-1)\,e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Общим решением уравнения (25) в параметрической форме будет

$$x = e^t - t, \qquad y = (t-1)\,e^t - \frac{t^2}{2} + C. \tag{27}$$

Пример 2. Дано уравнение

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0. \tag{28}$$

Это уравнение имеет вид (22). Полагая $y' = tx$, получим:

$$x^3 + t^3x^3 - 3tx^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{3t}{1+t^3}.$$

Тогда

$$y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Чтобы выразить y через параметр t, воспользуемся соотношением $dy = y'\,dx$. Получаем:

$$dy = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3\,(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{9\,(1-2t^3)^2\,t^2}{(1+t^3)^3}\,dt,$$

$$y = \int \frac{9\,(1-2t^3)\,t^2}{(1+t^3)^3}\,dt + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4\,t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

Таким образом, общим решением уравнения (28) в параметрической форме будет

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C. \tag{29}$$

---

* Такие кривые называются *уникурсальными*. Легко показать, что все кривые второго порядка суть уникурсальные кривые.

72. Уравнение, не содержащее независимой переменной. Рассмотрим уравнение вида

$$F(y,\ y') = 0. \tag{30}$$

Если оно разрешимо относительно y', так что

$$y' = f_k(y) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

то **общий интеграл** дается совокупностью равенств

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Особыми решениями могут быть прямые $y = b_i$, где b_i — корни уравнений $f_k(b) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ или, что то же, уравнения $F(b, 0) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (30) не разрешимо относительно y', но допускает *параметрическое представление*

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t). \tag{33}$$

В этом случае, используя основное соотношение $dy = y'\,dx$, имеем:

$$\varphi'(t)\,dt = \psi(t)\,dx. \tag{34}$$

Отсюда:

$$dx = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}, \qquad x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C. \tag{35}$$

Присоединяя сюда равенство $y = \varphi(t)$, получаем **общее решение** уравнения (30) в **параметрической форме**

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t). \tag{36}$$

Если, в частности, уравнение (30) разрешимо относительно y, т. е. может быть приведено к виду

$$y = \varphi(y'), \tag{37}$$

то оно допускает параметрическое представление вида

$$y = \varphi[\psi(t)], \quad y' = \psi(t). \tag{38}$$

Например, полагая $\psi(t) = t$, имеем параметрическое представление:

$$y = \varphi(t), \quad y' = t, \tag{39}$$

и общим решением в параметрической форме будет

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{t}\,dt + C, \quad y = \varphi(t). \tag{40}$$

Уравнение (37) может иметь особые решения вида $y = b$, где $b = \varphi(0)$.

Пример. Дано уравнение

$$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2. \tag{41}$$

Это уравнение однородно относительно величин y и $2 - y'$. Полагая $2 - y' = yt$, имеем $y^2(y' - 1) = y^2t^2$, откуда $y' = 1 + t^2$ ($y^2 = 0$?). Поэтому $y = \dfrac{2 - y'}{t} = \dfrac{1}{t} - t$.

Итак, уравнение (41) допускает следующее параметрическое представление:

$$y = \frac{1}{t} - t, \quad y' = 1 + t^2. \tag{42}$$

Следуя общей теории, имеем:

$$dy = y'\,dx, \quad \left(-\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = (1 + t^2)dx, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x = \frac{1}{t} + C.$$

Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид

$$x = \frac{1}{t} + C, \quad y = \frac{1}{t} - t. \tag{43}$$

Здесь параметр t легко исключается, после чего получаем общее решение в обычной форме:

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}. \tag{44}$$

Особых решений нет (почему?).

73. Обобщенное однородное уравнение. Рассмотрим один тип полных уравнений, приводящихся к неполному уравнению вида (30). Пусть дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{45}$$

в котором левая часть становится однородной функцией всех своих аргументов, если считать x, y, y' соответственно величинами 1-го, k-го, $(k - 1)$-го измерений, т. е.

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y') = t^m F(x, y, y'). \tag{46}$$

Такое уравнение называется *обобщенным однородным*. Напомним, что мы уже рассматривали обобщенное однородное уравнение в § 5 гл. I, но там мы предполагали его разрешенным относительно производной, в то время как здесь рассматривается общий случай.

Сделаем замену независимой переменной x и искомой функции y по формулам

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}, \tag{47}$$

где t — новая независимая переменная, а z — новая искомая функция. Будем иметь:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

или

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}. \tag{48}$$

Но, дифференцируя вторую из формул (47) по t, находим:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{kt}. \tag{49}$$

Подставляя это в (48), имеем:

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}. \tag{50}$$

Поэтому, выполняя в уравнении (45) подстановку (47), получим

$$F\left[e^t, \quad ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}\right] = 0, \tag{51}$$

или, согласно (46) (здесь роли t, x, y и y' играют соответственно e^t, 1, z и $\left.\frac{dz}{dt} + kz\right)$,

$$e^{mt} F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0. \tag{52}$$

Сокращая на e^{mt}, приходим к уравнению типа (30):

$$F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0. \tag{53}$$

§ 3. ОБЩИЙ МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

74. Приведение уравнения, не разрешенного относительно производной, к уравнению, разрешенному относительно производной. Общий случай. Рассмотрим теперь *полное* уравнение общего вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Предположим, что оно допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v), \tag{2}$$

так что

$$F[\varphi(u, v), \quad \psi(u, v), \chi(u, v)] = 0 \tag{3}$$

при всех значениях параметров u и v.

Используя уравнения (2) и основное соотношение $dy = y'dx$, мы всегда можем привести уравнение (1) к уравнению, разрешенному относительно производной.

Действительно, мы имеем:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \quad du = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv, \ y' = \chi(u, v). \quad (4)$$

Подставляя все это в соотношение $dy = y'dx$, получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right). \quad (5)$$

Взяв здесь u за независимую переменную, получим уравнение, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \quad (6)$$

Если мы сможем найти его общее решение

$$v = \omega(u, C), \quad (7)$$

то, подставляя функцию v, определяемую равенством (7), в первые два из уравнений (2), получим общее решение уравнения (1) в параметрической форме:

$$x = \varphi[u, \omega(u, C)], \quad y = \psi[u, \omega(u, C)]^*. \quad (8)$$

75. Случай, когда уравнение разрешимо относительно искомой функции. Практическое применение изложенного выше метода связано с преодолением двух трудностей: 1) нахождением параметрического представления уравнения (1) и 2) интегрированием уравнения (6).

Первая трудность легко преодолевается, когда уравнение (1) разрешимо относительно искомой функции или аргумента.

Предположим сначала, что уравнение (1) *разрешимо относительно искомой функции*, т. е. может быть переписано в виде

$$y = \varphi(x, y'). \quad (9)$$

В этом случае за параметры u и v можно принять x и y'. Тогда равенства (2) будут иметь вид

$$x = x, \quad y = \varphi(x, y'), \quad y' = y'. \quad (10)$$

Отбрасывая первое из этих равенств и обозначая переменную y', рассматриваемую как параметр, буквой p, получим следующее *параметрическое представление* уравнения (9):

$$y = \varphi(x, p), \quad y' = p. \quad (11)$$

---

* Таким образом, задача нахождения параметрического представления (2) и интегрирования уравнения (6) эквивалентна задаче интегрирования уравнения (1).

Заменяя теперь в основном соотношении $dy = y'\,dx$ величины dy и y' их значениями из формул (11):

$$dy = \varphi'_x\,dx + \varphi'_p\,dp, \qquad y' = p, \tag{12}$$

получим дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x\,dx + \varphi'_p\,dp = p\,dx. \tag{13}$$

Если принять в уравнении (13) x за независимую переменную, то, разделив обе его части на dx, мы придем к уравнению

$$\varphi'_x + \varphi'_p\,\frac{dp}{dx} = p. \tag{14}$$

Предположим, что нам удалось найти общее решение этого уравнения

$$p = \omega(x,\ C). \tag{15}$$

Тогда, подставляя найденное значение p в первое из уравнений (11), получим **общее решение** уравнения (9):

$$y = \varphi[x,\ \omega(x,\ C)]^*. \tag{16}$$

Уравнение (13) может иметь особое решение:

$$p = \gamma(x). \tag{17}$$

Подставляя это решение в первое из равенств (11), получим решение уравнения (9):

$$y = \varphi[x,\ \gamma(x)], \tag{18}$$

не содержащее произвольной постоянной. Это решение может быть **особым**.

76. Случай, когда уравнение разрешимо относительно независимой переменной. Если уравнение (1) разрешимо относительно независимой переменной, т. е. может быть приведено к виду

$$x = \varphi(y,\ y'), \tag{19}$$

то оно интегрируется так.

Полагая $y' = p$, получаем *параметрическое представление* уравнения (19):

$$x = \varphi(y,\ p), \qquad y' = p. \tag{20}$$

Подставим в равенство $dy = y'\,dx$ вместо y' и dx их значения

$$y' = p, \qquad dx = \varphi'_y\,dy + \varphi'_p\,dp. \tag{21}$$

---

* Иногда уравнение (13) легче интегрируется, если принять за независимую переменную не x, а p. Тогда мы получим общее решение в параметрической форме.

Получим:

$$dy = p(\varphi'_y\,dy + \varphi'_p\,dp). \tag{22}$$

Приняв y за независимую переменную, придем к уравнению

$$1 = p\left(\varphi'_y + \varphi'_p\,\frac{dp}{dy}\right), \tag{23}$$

или

$$\frac{1}{p} = \varphi'_y + \varphi'_p\,\frac{dp}{dy}. \tag{24}$$

Отсюда:

$$p = \omega(y, C), \tag{25}$$

и **общий интеграл** уравнения (19) имеет вид

$$x = \varphi[y, \omega(y, C)]. \tag{26}$$

Если $p = \gamma(y)$ — особое решение уравнения (24), то

$$x = \varphi[y, \gamma(y)] \tag{27}$$

может быть **особым решением** уравнения (19).

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно x, т. е. может быть записано в виде (19), то оно, кроме особых решений вида (27), может еще иметь **особые решения** вида $y = b$, которые мы могли потерять при нахождении общего интеграла вследствие того, что искали общий интеграл в виде, разрешенном относительно x.

Решения вида $y = b$ находятся так.

Полагаем в данном уравнении $y = b$, где b — некоторое неопределенное постоянное число. Получаем $F(x, b, 0) = 0$. Если существует такое число b, что это равенство выполняется тождественно относительно x, то $y = b$ и будет решением данного уравнения.

Мы показали выше, что если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно искомой функции y или аргумента x, т. е. приводимо к виду (9) или (19), то всегда можно легко получить его параметрическое представление. Однако затруднения в решении получающихся при этом уравнений (13) и (22), вообще говоря, остаются. Рассмотрим теперь два частных случая уравнения (9), в которых и эти затруднения отпадают.

77. Уравнение Лагранжа. Рассмотрим уравнение, в котором y является **линейной** функцией от x с коэффициентами, зависящими от y', т. е. уравнение вида

$$y = \varphi(y')\,x + \psi(y'). \tag{28}$$

Это уравнение называется *уравнением Лагранжа.*

Покажем, что *уравнение Лагранжа в отличие от уравнения* (9) *общего вида всегда интегрируется в квадратурах.*

Действительно, полагая $y' = p$, имеем:

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p),\ y' = p. \tag{29}$$

Заменяя в равенстве $dy = y'dx$ величины dy и y' их значениями из (29), имеем:

$$\varphi(p)\,dx + [\varphi'(p)\,x + \psi'(p)]\,dp = p\,dx \tag{30}$$

или

$$[\varphi(p) - p]\,dx + [\varphi'(p)\,x + \psi'(p)]\,dp = 0. \tag{31}$$

В полученном уравнении коэффициент при dx не зависит от x, а коэффициент при dp зависит от x линейно. Поэтому, его можно привести к линейному уравнению с искомой функцией x. Для этого разделим обе части уравнения (31) на dp и $\varphi(p) - p$, предполагая, что $\varphi(p) - p \not\equiv 0$, т. е. что в уравнении (28) $\varphi(y') \not\equiv y'$*. Получим:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}\ [\varphi(p) - p = 0?]. \tag{32}$$

Это — линейное уравнение с искомой функцией x от независимой переменной p. Его общее решение имеет вид**:

$$x = A(p)\,C + B(p). \tag{33}$$

Подставляя это выражение в первое из равенств (29), получим:

$$y = A_1(p)\,C + B_1(p), \tag{34}$$

где

$$A_1(p) = A(p)\,\varphi(p), \quad B_1(p) = B(p)\,\varphi(p) + \psi(p). \tag{35}$$

Окончательно получаем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= A(p)\,C + B(p), \\ y &= A_1(p)\,C + B_1(p). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Приводя уравнение (31) к виду (32), мы делили первое из них на $\varphi(p) - p$. При этом мы могли потерять решения уравнения (31), имеющие вид $p = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где p_i — корни уравнения

$$\varphi(p) - p = 0. \tag{37}$$

Подставляя эти значения p в первое из равенств (29) и, принимая во внимание, что

$$\varphi(p_i) = p_i, \tag{38}$$

получим следующие решения уравнения Лагранжа:

$$y = p_i x + \psi(p_i)\ \ (i = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Эти решения могут быть как частными, так и особыми.

---

* Случай $\varphi(y') \equiv y'$ будет рассмотрен в следующем пункте.

** См. п. 36, формула (41).

Таким образом, особыми решениями уравнения Лагранжа могут быть только прямые (39), где p суть корни уравнения (37).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{40}$$

Полагая $y' = p$, имеем:

$$y = xp^2 + p^2, \quad y' = p. \tag{41}$$

Пользуясь основным соотношением $dy = y'\,dx$, получаем:

$$p^2\,dx + (2px + 2p)\,dp = p\,dx \tag{42}$$

или

$$(p^2 - p)\,dx + 2p(x+1)\,dp = 0. \tag{43}$$

Приводя это уравнение к линейному относительно x, имеем:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}\,[p^2 - p = 0?]. \tag{44}$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{C_1}{(p-1)^2} - 1. \tag{45}$$

Подставляя найденное выражение для x в первое из равенств (41), получим:

$$y = \frac{C_1 p^2}{(p-1)^2}. \tag{46}$$

Поэтому уравнения

$$x = \frac{C_1}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{C_1 p^2}{(p-1)^2} \tag{47}$$

дают общее решение уравнения (40) в параметрической форме.

Исключая параметр p, получим общее решение в обычном виде:

$$y = (\sqrt{x+1} + C)^2 \; (C = \sqrt{C_1}). \tag{48}$$

Уравнение $p^2 - p = 0$ дает два значения $p: p = 0$ и $p = 1$. Подставляя их в первое из равенств (41), найдем два решения уравнения (40):

$$y = 0, \quad y = x + 1. \tag{49}$$

Первое из этих решений является особым, второе — частным.

78. Уравнение Клеро. Рассмотрим теперь тот случай, когда в уравнении Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$. В этом случае уравнение Лагранжа принимает вид

$$y = y'x + \psi(y') \tag{50}$$

и называется *уравнением Клеро*. Предположим, что $\psi(y')$ есть нелинейная функция от y', ибо в противном случае уравнение Клеро вырождается в уравнение с разделяющимися переменными.

Так же как и при интегрировании уравнения Лагранжа, положим $y' = p$. Тогда:

$$y = px + \psi(p), \quad y' = p. \tag{51}$$

Пользуясь основным соотношением $dy = y'\,dx$, получаем:

$$pdx + [x + \psi'(p)]\,dp = pdx,$$

или

$$[x + \psi'(p)]\,dp = 0. \tag{52}$$

Уравнение (52) распадается на два:

$$dp = 0 \text{ и } x + \psi'(p) = 0. \tag{53}$$

Первое из этих уравнений дает для p постоянное значение $p = C$. Подставляя это значение в первое из уравнений (51), найдем общее решение уравнения Клеро. Оно будет иметь вид

$$y = Cx + \psi(C), \tag{54}$$

т. е. представляет собою семейство прямых. Сравнивая (54) и (50), мы видим, что *общее решение уравнения Клеро получается формально заменой y' на C.*

Второе из уравнений (53) дает выражение x через параметр p:

$$x = -\psi'(p). \tag{55}$$

Подставляя это значение x в первое из уравнений (51), получим выражение y через тот же параметр p. Таким образом, мы получаем еще решение уравнения Клеро:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

в котором p есть параметр.

Докажем, что это решение является заведомо особым, если $\psi''(p)$ существует, непрерывна и не обращается в нуль. С этой целью покажем, что решение (56), при сделанном предположении относительно $\psi(p)$, является огибающей семейства интегральных кривых (54).

Согласно п. **14**, находим сначала дискриминантную кривую, которая в нашем случае будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C) \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(C), \\ y &= -C\psi'(C) + \psi(C). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Здесь C — параметр. Кривая (58) совпадает с кривой (56), так как уравнения (58) и (56) отличаются только обозначением параметра. Таким образом, решение (56) во всяком случае является дискриминантной кривой семейства (54). Чтобы убедиться, что она или, что то же, кривая (58) является огибающей семейства (54) достаточно показать, что кривая (58) есть кривая в гладкой параметризации. Это действительно имеет место, ибо

$$x'_C = -\psi''(C), \quad y'_C = -C\psi''(C), \tag{59}$$

откуда видно, что x'_C и y'_C непрерывны и x'_C не обращается в нуль.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y = y'x - \frac{1}{4}y'^2. \tag{60}$$

Заменяя y' на C, получаем общее решение

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2. \tag{61}$$

Ищем огибающую семейства (61).

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx - \frac{1}{4}C^2, \\ 0 &= x - \frac{1}{2}C. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Отсюда получаем дискриминантную кривую:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}C, \\ y &= \frac{1}{4}C^2. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Так как $\psi''(C) = -\frac{1}{2} \neq 0$, то кривая (63) является огибающей. Исключая параметр C, получаем ее уравнение в явном виде:

$$y = x^2. \tag{64}$$

Интегральными кривыми уравнения (60) являются прямые (61) и их огибающая, парабола (64) (рис. 27). Интегральными кривыми будут также и кривые вида AMT, составленные из дуги AM параболы (64) и касательной MT в точке M.

К уравнению Клеро мы приходим всякий раз, когда ищем кривую по свойству ее касательной, не зависящему от точки касания (т. е. общему для всех точек кривой). Пусть $y = f(x)$ искомая кривая (рис. 28).

Уравнение касательной в точке $M(x, y)$ имеет вид:

$$Y - y = y'(X - x) \text{ или } Y = y'X + y - y'x. \tag{65}$$

Параметры касательной: $k = \operatorname{tg} \alpha = y'$, $b = y - y'x$. Всякое общее свойство касательной выражается зависимостью между k и b:

$$F(k, b) = 0. \tag{66}$$

Заменяя здесь k и b их значениями, будем иметь:

$$F(y', y - y'x) = 0. \tag{67}$$

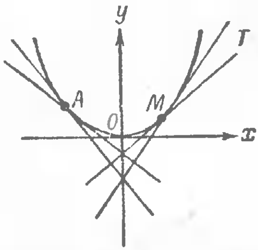


Рис. 27

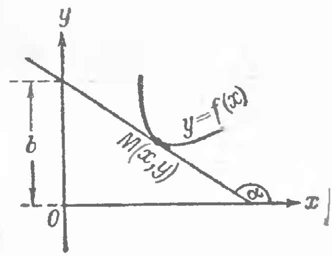


Рис. 28

Разрешая это уравнение относительно $y - y'x$, получаем:

$$y - y'x = \psi(y'), \tag{68}$$

т. е. уравнение Клеро. Особое решение и есть та кривая, семейство касательных к которой даст общее решение.

§ 4. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

79. Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат. В качестве примера одного из многочисленных геометрических приложений дифференциальных уравнений первого порядка рассмотрим так называемую *задачу о траекториях.* Пусть на плоскости (x, y) задано однопараметрическое семейство кривых линий

$$\Phi(x, y, a) = 0. \tag{1}$$

Кривая L_1 (рис. 29), пересекающая все кривые L семейства (1) под одним и тем же постоянным углом α*,

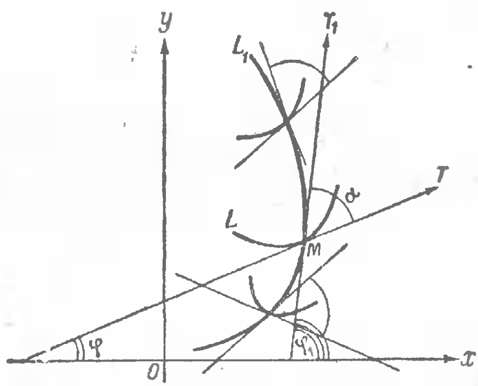


Рис. 29

* Углом α между двумя кривыми L_1 и L в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

называется *изогональной траекторией* этого семейства. Если, в частности, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то изогональная траектория называется *ортогональной.* Найдем изогональные (ортогональные) траектории семейства (1).

С этой целью установим сначала соотношение между угловыми коэффициентами касательной к кривой семейства (1) и к изогональной траектории в точке их пересечения. Пусть $M(x_1, y_1)$ — любая точка на изогональной траектории L_1. Обозначим углы, образованные осью Ox с касательной MT к кривой L семейства (1), проходящей через точку M, и с касательной MT_1 к траектории L_1 в точке M, соответственно через φ и φ_1. Тогда при перемещении точки M по траектории выполняется соотношение

$$\varphi_1=\varphi+\alpha=\mathrm{const},$$

причем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{dy_1}{dx_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Предположим, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ и обозначим $\operatorname{tg}\alpha$ через k. Имеем $\varphi=\varphi_1-\alpha$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi_1} \tag{3}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy_1}{dx_1}-k}{1+k\dfrac{dy_1}{dx_1}}. \tag{4}$$

Это равенство и устанавливает искомую связь между направлением касательной в любой точке M траектории L_1 и направлением касательной к кривой L семейства (1), проходящей через эту точку.

Составим теперь д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е у р а в н е н и е с е м е й с т в а (1). Для этого, как всегда, исключим параметр a из уравнений

$$\Phi(x, y, a)=0, \quad \Phi'_x+\Phi'_y\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

Получим:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{6}$$

Это равенство выполняется для всех точек области, заполненной кривыми семейства (1). Оно выполняется, в том числе и в рассматриваемой нами точке M. Но в этой точке мы можем заменить x и y на x_1 и y_1, а $\frac{dy}{dx}$ — на ее значение из (4), так что получим соотношение

$$F\left(x_1\ y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{1+k\,\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0, \tag{7}$$

связывающее координаты любой точки M траектории L_1 с направлением касательной к ней в этой точке. Следовательно, равенство (7) есть *дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий.*

Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)=$ $=-\operatorname{ctg}\varphi_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$, и, следовательно, вместо соотношения (4) мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}. \tag{8}$$

Заменяя теперь в (6) x, y и $\frac{dy}{dx}$ соответственно на x_1, y_1 и $-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$ получим *дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:*

$$F\left(x_1,\ y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0. \tag{9}$$

Получив дифференциальное уравнение семейства изогональных (ортогональных) траекторий, мы можем, конечно, переписать его, опуская индексы. В итоге мы приходим к следующему правилу нахождения дифференциального уравнения семейства изогональных (ортогональных) траекторий: 1) составить дифференциальное уравнение данного семейства, 2) заменить в полученном уравнении $\frac{dy}{dx}$ на

$$\frac{\frac{dy}{dx}-k}{1+k\,\frac{dy}{dx}} \quad \text{в случае } \alpha\neq\frac{\pi}{2}\ (k=\operatorname{tg}\alpha), \tag{10}$$

и на

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ если } \alpha=\frac{\pi}{2}. \tag{10'}$$

80. Примеры.

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства полупрямых, выходящих из начала координат, $y=ax$.

Исключая a из уравнений $y=ax$ и $y'=a$, найдем дифференциальное уравнение рассматриваемого семейства: $y=y'x$. Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий: $y = -\frac{1}{y'}x$ или $y\,dy + x\,dx = 0$. Следовательно, искомые ортогональные траектории суть окружности $x^2 + y^2 = C^2$.

Пример 2. Найти изогональные траектории семейства полупрямых, выходящих из начала координат. Дифференциальное уравнение семейства имеет вид $y = y' \cdot x$. Заменяя здесь y' на $\frac{y' - k}{1 + ky'}$, получаем:

$$y = \frac{y' - k}{1 + ky'}\,x$$

или

$$(y + kx)\,dx + (ky - x)\,dy = 0. \tag{11'}$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомых изогональных траекторий.

Интегрируя однородное уравнение (11) при помощи интегрирующего множителя, получаем*:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \tag{12}$$

или в полярных координатах $r = Ce^{\frac{\theta}{k}}$. Итак, искомыми изогональными траекториями является семейство логарифмических спиралей. Из курсов дифференциального исчисления** известно, что логарифмическая спираль $r = Ce^{m\theta}$ пересекает все свои радиусы-векторы под постоянным углом ω, причем $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$. Теперь мы видим, что таким свойством обладает только логарифмическая спираль.

Пример 3. Найти силовые линии поля, создаваемого силами $F\left\{F_x, F_y\right\}$, имеющими *потенциал* $U = \frac{y}{x}$, так что проекции сил на оси координат равны

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Линии $U = C$ называются *линиями уровня* или *эквипотенциальными линиями*. *Силовыми линиями* называются линии, касательные к которым совпадают с направлением силы в точке касания. Направление силы определяется равенством $\operatorname{tg}(\widehat{F, x}) = \frac{F_y}{F_x}$, а направление касательной к линии уровня равенством $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{F_x}{F_y}$. Следовательно, касательные к силовой линии и к линии уровня взаимно перпендикулярны. Таким образом, силовые линии суть ортогональные траектории семейства линий уровня.

Найдем силовые линии в нашем примере. Так как дифференциальным уравнением семейства линий уровня является $y = y' \cdot x$, то дифференциальным уравнением семейства силовых линий будет $y = -\frac{1}{y'}\,x$, откуда ясно, что силовыми линиями являются окружности $x^2 + y^2 = C^2$. Настоящий пример дает физическое истолкование примера 1.

---

* См. пример в п. **61**. В нашем случае $p = 1$, $q = -k$.

** См., например: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., 1947, стр. 604.

81. Случай полярных координат. Если семейство кривых задано в полярных координатах*

$$\Phi(r, \theta, \alpha) = 0, \tag{13}$$

то, естественно, и изогональные траектории искать в полярных координатах.

Пусть L_1 (рис. 30) — изогональная траектория и $M(r_1, \theta_1)$ — любая точка на ней. Так как в полярных координатах обычно положение касательной определяют углом, образованным касательной с продолженным радиусом-вектором, то положение касательной MT_1 к изогональной траектории L_1 определяется углом $\omega_1 = \angle T_1MR$, а положение касательной MT к кривой L семейства (13), проходящей через точку M, — углом $\omega = \angle TMR$.

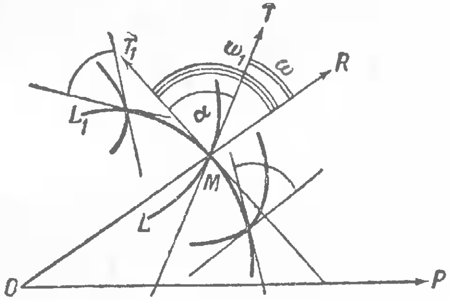


Рис. 30

Из рис. 30 видно, что

$$\omega_1 - \omega = \alpha = \text{const}, \tag{14}$$

причем $\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{r_1}{\dot r_1}$, $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{\dot r}$**, где $\dot r_1 = \frac{dr_1}{d\theta_1}$, $\dot r = \frac{dr}{d\theta}$.

Предположим сначала, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и обозначим $\operatorname{tg}\alpha$ через k. Имеем $\omega = \omega_1 - \alpha$. Поэтому:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\omega_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega_1} \tag{15}$$

или

$$\frac{r}{\dot r} = \frac{\frac{r_1}{\dot r_1} - k}{1 + k\frac{r_1}{\dot r_1}}. \tag{16}$$

Пусть дифференциальное уравнение семейства (13) имеет вид

$$F(r, \theta, \dot r) = 0. \tag{17}$$

Перепишем это уравнение так:

$$F\left(r, \theta, \frac{\dot r}{r} r\right) = 0. \tag{18}$$

---

* Если семейство кривых задано в декартовых координатах, то иногда переход к полярным координатам облегчает нахождение изогональных траекторий (см. пример 2).

** См.: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., 1947, п. 208.

Заменяя здесь r, θ, $\frac{r}{\dot r}$ соответственно на

$$r_1, \ \theta_1 \ \text{и} \ \frac{1 + k\dfrac{r_1}{\dot r_1}}{\dfrac{r_1}{\dot r_1} - k}$$

и опуская индексы, получим дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий:

$$F\left(r, \ \theta, \ \frac{1 + k\dfrac{r}{\dot r}}{\dfrac{r}{\dot r} - k}\, r\right) = 0. \tag{19}$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\omega = \omega_1 - \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{\operatorname{tg}\omega_1}$, $\frac{r}{\dot r} = -\frac{\dot r_1}{r_1}$. Поэтому дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий имеет вид

$$F\left(r, \ \theta, -\frac{r^2}{\dot r}\right) = 0. \tag{20}$$

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства кардиоид

$$r = a(1 + \cos\theta). \tag{21}$$

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} r &= a(1 + \cos\theta), \\ \dot r &= -a\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Исключая a, получим дифференциальное уравнение семейства (21):

$$\dot r = -\frac{r\sin\theta}{1 + \cos\theta}. \tag{23}$$

Отсюда, заменяя, согласно (20), $\dot r$ на $-\frac{r^2}{\dot r}$, находим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$-\frac{r^2}{\dot r} = -\frac{r\sin\theta}{1 + \cos\theta}, \tag{24}$$

которое можно переписать так:

$$\frac{\dot r}{r} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}, \tag{25}$$

или

$$\frac{\dot r}{r} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{26}$$

Интегрируя, найдем:

$$r = C(1 - \cos\theta). \tag{27}$$

Это и есть уравнение искомых ортогональных траекторий.

Пример 2. Найти ортогональные траектории семейства лемнискат

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0. \tag{28}$$

Для решения задачи удобнее перейти к полярным координатам. Получаем:

$$r^2=2a^2\cos 2\theta. \tag{29}$$

Дифференциальное уравнение этого семейства имеет вид

$$\dot{r}+r\operatorname{tg}2\theta=0. \tag{30}$$

Заменяя здесь, согласно (20), $\dot{r}$ на $-\frac{r^2}{\dot{r}}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$-r+\operatorname{tg}2\theta\cdot\dot{r}=0. \tag{31}$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$r^2=C\sin 2\theta. \tag{32}$$

Возвращаясь к переменным x, y, получим семейство ортогональных траекторий в декартовых координатах:

$$(x^2+y^2)^2-2Cxy=0. \tag{33}$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

82. Предварительные замечания. Рассмотрим теперь уравнение n-го порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Будем предполагать функцию F такой, чтобы уравнение (1) было разрешимо* относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Если, в частности, уравнение (1) содержит искомую функцию и ее производные только в первой степени и не содержит их произведений, т. е. функция F линейна относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, то это уравнение можно переписать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x). \tag{3}$$

Уравнение такого вида называется *линейным уравнением*. Теория линейных уравнений изложена в специальных главах VI—VIII.

В настоящей главе мы рассматриваем уравнения n-го порядка общего вида, причем в § 1 при изложении общих вопросов речь идет об уравнении, разрешенном относительно старшей производной, затем, в § 2, мы рассматриваем также некоторые типы уравнений, не разрешенных относительно $y^{(n)}$.

Всякая функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая n раз в интервале (a, b)**, называется *решением* уравнения (1) в этом интервале, если она обращает уравнение (1) в тождество***

$$F[x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)] \equiv 0, \tag{4}$$

справедливое при всех значениях x из интервала (a, b).

---

* Хотя бы в смысле теоремы существования неявной функции.

** См. первую сноску на стр. 23.

*** См. сноску на стр. 16.

83. Геометрическое истолкование. Всякому решению уравнения n-го порядка (1), так же как и решению уравнения первого порядка, соответствует на плоскости (x, y) некоторая кривая, которую, как и прежде, мы будем называть *интегральной кривой*.

Подобно тому, как уравнение первого порядка задает некоторое общее свойство семейства касательных всех его интегральных кривых, каждое уравнение n-го порядка тоже выражает собою некоторое общее геометрическое свойство всех его интегральных кривых.

Так, всякое уравнение второго порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0 \tag{5}$$

мы можем переписать в виде

$$F\left[x,\ y,\ y',\ (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\ \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0 \tag{6}$$

или

$$F_1\left[x,\ y,\ y',\ \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0, \tag{7}$$

откуда ясно, что оно представляет собою, в общем случае, связь между координатами, наклоном касательной и кривизной в каждой точке интегральной кривой.

Пример. Геометрическое свойство, выражаемое уравнением

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k \quad (k = \text{const}), \tag{8}$$

состоит, очевидно, в том, что все интегральные кривые этого уравнения имеют одну и ту же кривизну k. Таким свойством, как известно, обладают окружности радиуса $\frac{1}{k}$, так что каждая кривая из семейства окружностей

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{k^2}, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является интегральной кривой уравнения (8). В этом нетрудно убедиться и непосредственно.

84. Механическое истолкование уравнения второго порядка. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки M по оси Ox (рис. 31).

Рис. 31

Тогда x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ выражают соответственно положение, скорость и ускорение точки M в момент времени t. Считая, что (в общем случае) сила, действующая на точку, есть функция $f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$, зависящая от времени, положения и скорости точки, и что масса точки равна единице, мы, согласно второму закону Ньютона, будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{10}$$

определяющее закон движения точки по оси Ox.

Всякое решение $x = x(t)$ уравнения (10) соответствует некоторому движению (выражая закон этого движения — зависимость положения точки от времени) и иногда просто называется *движением.*

Основной задачей итнегрирования уравнения (10) *является нахождение всех движений, определяемых этим уравнением, и изучение их свойств.*

Отметим, что наиболее полно эта задача решена для случая, когда сила f является *линейной* функцией от положения точки и ее скорости, т. е. когда мы имеем *линейное уравнение второго порядка*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\ \frac{dx}{dt} + q(t)\ x = f(t). \tag{11}$$

Если коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ являются *постоянными*, то удается найти все решения в *квадратурах*, а иногда даже и в *элементарных* функциях*.

В общем случае даже линейное уравнение (11) не удается проинтегрировать в квадратурах, не говоря уже об уравнении (10) с нелинейной правой частью.

В связи с этим возникает проблема: по *виду* функции $f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ судить о *свойствах* движений, определяемых уравнением (10).

85. Задача Коши. Для уравнения (2) *задача Коши* ставится следующим образом. Требуется среди всех решений уравнения (2) найти решение

$$y = y(x), \tag{12}$$

в котором функция $y(x)$ вместе с ее производными до $(n-1)$-го порядка включительно принимает заданные значения $y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ при заданном значении x_0 независимой переменной x, т. е.

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ {}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{13}$$

---

* См. п.п. **180** и **181**.

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, так что решение (12) удовлетворяет условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{14}$$

Числа $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ называются *начальными значениями решения* (12), число x_0 — *начальным значением независимой переменной*, числа $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ вместе взятые называются *начальными данными* решения (12), а условия (14) — *начальными условиями* этого решения.

Характерная особенность задачи Коши состоит в том, что условия, которые налагаются на искомое решение при постановке ее, задаются при одном и том же значении независимой переменной.

В случае уравнения второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{15}$$

задача Коши состоит в нахождении решения (12), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{16}$$

Эта задача с геометрической точки зрения может быть истолкована, как задача нахождения такой интегральной кривой (рис. 32), которая проходила бы через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имела бы в этой точке заданное направление касательной, т. е. $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$.

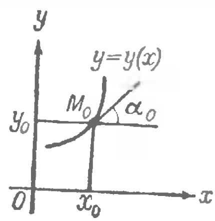


Рис. 32

Дадим механическое истолкование задачи Коши. Рассмотрим дифференциальное уравнение (10),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Задача Коши для уравнения (10) состоит в том, чтобы из всех движений, определяемых этим уравнением, найти движение $x = x(t)$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{17}$$

т. е. найти такое движение, в котором движущаяся точка занимала бы в заданный (начальный) момент времени t_0 заданное (начальное) положение x_0 и имела бы заданную (начальную) скорость v_0*.

---

* См. Введение, пример 2.

При решении задачи Коши для уравнения (10) возникают вопросы о том, определяют ли заданные начальные условия (17) движение $x = x(t)$ и притом единственным или не единственным образом, в каком интервале изменения времени это движение определено, каков его характер, как изменяется движение с изменением начальных значений x_0 и v_0 и т. д. Все эти вопросы составляют часть общей теории дифференциальных уравнений и рассматриваются в гл. V. Сейчас лишь заметим, что при некоторых условиях, наложенных на правую часть уравнения (10) в окрестности начальных данных t_0, x_0, v_0, оно определяет в некоторой окрестности начального момента времени единственное движение, удовлетворяющее начальным условиям (17)* и что свойства этого движения вполне определяются свойствами правой части уравнения и начальными данными.

При рассмотрении задачи Коши для уравнения n-го порядка (2), так же как и в случае уравнения первого порядка**, возникают вопросы существования и единственности решения задачи Коши, а также вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной и как функции начальных данных.

Ответы на эти вопросы мы даем в гл. V.

Обращаем внимание читателя на то, что единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка (2) не означает, что через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит только одна интегральная кривая, как это имело место для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Например, для уравнения второго порядка (15) единственность решения задачи Коши с начальными условиями (16) нужно понимать в том смысле, что через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (15), обладающая тем свойством, что касательная к ней в этой точке составляет с положительным направлением оси Ox угол α_0, тангенс которого равен заданному начальному значению первой производной y'_0. $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$, в то время как через точку (x_0, y_0), наряду с этой интегральной кривой, как правило, проходит еще бесчисленное множество интегральных кривых, но уже с другими наклонами касательных в этой точке.

Пример. Найдем решение уравнения

$$y'' + y = 0 \tag{18}$$

с начальными условиями

$$y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{19}$$

---

* См. п. 128.

** См. п. 5.

Можно доказать, что все решения уравнения (18) содержатся в формуле*

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{20}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Отсюда

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x. \tag{21}$$

Выберем C_1 и C_2 так, чтобы y и y' определяемые формулами (20) и (21), обратились бы соответственно в 1 и 0, когда $x = 0$. Подставляя в (20) и (21) вместо x, y и y' числа 0,1 и 0, получим:

$$1 = C_1 \quad \text{и} \quad 0 = C_2. \tag{22}$$

Следовательно, искомым решением будет

$$y = \cos x. \tag{23}$$

Это решение единственно. Однако через точку (0,1), кроме кривой $y = \cos x$, проходит бесчисленное множество интегральных кривых

$$y = \cos x + C_2 \sin x, \tag{24}$$

где C_2 — произвольная постоянная, не равная нулю, но ни одна из касательных к ним в точке (0,1) не совпадает с касательной к кривой $y = \cos x$ в этой точке.

Достаточное условие существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, указанное в п. **6**, распространяется и на случай уравнения n-го порядка. А именно можно доказать, что *для существования (непрерывного вместе с производными до порядка n включительно) решения задачи Коши для уравнения* (2) *достаточно предположить, что правая часть этого уравнения непрерывна в окрестности начальных данных* (теорема Пеано)**.

86. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. В главе V мы докажем, что если правая часть уравнения (2) удовлетворяет в окрестности начальных данных некоторым условиям, то существует единственное решение задачи Коши с этими начальными данными, определенное в некоторой окрестности начального значения независимой переменной и что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами правой части уравнения (2) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для уравнения (2) в упрощенной формулировке.

Теорема. *Пусть дано уравнение* (2),

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

и поставлены начальные условия (14):

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

---

* См. п. **176**, пример 4; в нашем случае $k = 1$.

** См. гл. V, п. **155**.

Предположим, что функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *определена в некоторой замкнутой ограниченной области*

$$R\colon |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |y' - y_0'| \leqslant b, \ \ldots,$$
$$|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leqslant b$$

с точкой $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *внутри* (a *и* b — *заданные положительные числа) и удовлетворяет в этой области следующим двум условиям:*

I. *Функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна по всем своим аргументам и, следовательно, ограничена, т. е.:*

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leqslant M, \tag{25}$$

где M — *постоянное положительное число, а* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ — *любая точка области* R;

II. *Функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *имеет ограниченные частные производные по аргументам* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *т. е.*

$$\left| \frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}} \right| \leqslant K \ (l = 0, 1 \ldots, n-1; \ y^{(0)} \equiv y),$$

где K — *постоянное положительное число, а* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ — *любая точка области* R.

При этих предположениях уравнение (2) *имеет* ***единственное*** *решение* (12)

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям (14). *Это решение заведомо определено и непрерывно вместе с производными до порядка* n *включительно в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{26}$$

где

$$h = \min\left\{a, \ \frac{b}{\max\limits_{(R)}(M, |y'|, \ \ldots, |y^{(n-1)}|)}\right\}. \tag{27}$$

Из этой теоремы следует, что, *если правая часть уравнения* (2) *есть* ***полином*** *от своих аргументов, то какие бы начальные данные ни взять, существует единственное решение уравнения* (2) *с этими начальными данными.*

87. Понятие о граничной (краевой) задаче*. Сформулированная в п. **85** задача Коши является лишь одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений, в которых ищется

* К решению граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся многие задачи математической физики и вариационного исчисления.

решение, подчиненное некоторым условиям. Другой не менее важный тип таких задач представляет собой так называемые *граничные (краевые) задачи*, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, как это имеет место в задаче Коши, а н а к о н ц а х некоторого интервала $[a, b]$ и ищется решение, определенное в н у т р и этого интервала. Эти условия называются *граничными (краевыми) условиями.*

Граничные задачи могут ставиться, очевидно, лишь для уравнений порядка выше первого, ибо, как мы уже говорили в п. **5**, в случае уравнения первого порядка, задание значения искомого решения в одной точке уже определяет (при некоторых условиях) интегральную кривую единственным образом, и эта интегральная кривая может удовлетворять граничному условию в другой точке лишь случайно.

Заметим, что *граничная задача не всегда имеет решение, а если имеет, то, весьма часто, не единственное.*

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'' = 6x, \tag{28}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ y &= 1 \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Интегрируя последовательно уравнение (28), имеем:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1, \\ y &= x^3 + C_1 x + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Подставим сюда граничные условия (29), т. е. положим в первом из равенств (30) $x = 0$, $y' = 0$, а во втором $x = 1$, $y = 1$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 0 + C_1, \\ 1 &= 1 + C_1 \cdot 1 + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, так что искомым решением будет

$$y = x^3.$$

Других решений нет (почему?).

Пример 2. Покажем, что для уравнения (18),

$$y'' + y = 0$$

не существует решения, удовлетворяющего граничным условиям:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad y = 2 \quad \text{при} \quad x = \pi. \tag{31}$$

В самом деле, как уже сказано выше, все решения уравнения (18) содержатся в формуле (20),

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Попытаемся выбрать их так, чтобы функция y, определяемая формулой (20), удовлетворяла граничным условиям (31). Подставляя в (20) поочередно граничные условия (31), т. е. полагая сначала $x = 0$, $y = 1$, затем $x = \pi$, $y = 2$, получаем:

$$1 = C_1, \quad 2 = -C_1.$$

Эта система н е с о в м е с т н а. Таким образом, уравнение (18) не имеет решений, удовлетворяющих граничным условиям (31).

Если во втором из граничных условий (31) заменить $y=2$ на $y=-1$, то соответствующая система для определения C_1 и C_2 уже будет совместной. Мы получим из нее $C_1=1$, а C_2 останется неопределенным. Следовательно, мы будем иметь бесчисленное множество решений:

$$y = \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

88. Общее решение*. Семейство решений уравнений (2), зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{32}$$

называют обычно *общим решением* этого уравнения. Геометрически оно представляет собою семейство интегральных кривых на плоскости (x, y), зависящее от n параметров C_1, $C_2, \ldots, C_n$, причем уравнение этого семейства разрешено относительно y.

Ниже мы даем определение общего решения уравнения (2) в области D изменения переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

В качестве области D мы будем рассматривать область в пространстве $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (2).

Функцию

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{33}$$

определенную в некоторой области изменения переменных x, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, имеющую непрерывные частные производные по x до порядка n включительно, будем называть *общим решением* уравнения (2) в области D, если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1\ C_2, \ldots, C_n), \\ y' &= \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

составленная из равенства (33) и $n-1$ равенств, полученных последовательным дифференцированием его по x, разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в области D, так что при любых значениях $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, принадлежащих области D, системой (34) определяются значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 &= \psi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

---

* Ср. п. 8.

и если функция (33) является решением уравнения (2) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, доставляемых формулами (35), когда точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ пробегает область D.

Формула общего решения (33) дает возможность за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ решить любую задачу Коши для уравнения (2) в области D, т. е. найти решение уравнения (2), определяемое начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y^{(n-1)}$, причем $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ — любая точка из D.

Для нахождения этого решения подставим в систему (34) вместо $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ начальные данные $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Найдем из этой системы $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 &= \psi_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \equiv C_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \equiv C_n^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Подставим эти значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в формулу общего решения (33). Получим

$$y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}). \tag{38}$$

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ нет.

Иногда в формуле общего решения (33) роль произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ играют начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ искомой функции y и ее первых $n-1$ производных $y', \ldots, y^{(n-1)}$ при некотором фиксированном значении x_0 аргумента x, так что формула (33) принимает вид

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \tag{39}$$

Такая форма записи общего решения называется *общим решением в форме Коши.*

89. Общий интеграл*. В большинстве случаев, интегрируя уравнение (2), получаем общее решение (n — параметрическое семейство интегральных кривых) в неявном виде (в виде, не

---

* Ср. п. 9.

разрешенном относительно y):

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{40}$$

Такая форма общего решения уравнения (2) называется обычно *общим интегралом* этого уравнения.

Будем называть соотношение (40) *общим решением в неявной форме* или *общим интегралом* уравнения (2) в области D, если это соотношение определяет общее решение $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ уравнения (2) в области D.

90. Общее решение в параметрической форме*. В некоторых случаях нахождение общего решения уравнения (2) в явной или неявной форме представляет большие затруднения. В таких случаях интегрируя дифференциальное уравнение (2), ищут семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в параметрическом виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y &= \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением* уравнения (2) *в параметрической форме*.

Если из уравнений (41) удается исключить параметр t, то получают общее решение в неявном или даже в явном виде.

91. Частное решение**. Если решение уравнения (2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этого уравнения, то такое решение мы будем называть *частным решением*. Решение, получающееся из формулы общего решения при частных числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, включая $\pm\infty$, будет, очевидно, частным решением. Решая задачу Коши при помощи формулы общего решения, мы всегда получаем частное решение.

92. Особое решение***. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, будем называть *особым решением*.

Уравнение n-го порядка (2) может иметь семейство особых решений, зависящее от произвольных постоянных, причем число последних может доходить до $n-1$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' = 2\sqrt{y'}. \tag{42}$$

Полагая

$$y' = z, \tag{43}$$

где z — новая неизвестная функция, получаем:

$$z' = 2\sqrt{z}. \tag{44}$$

---

* См. предыдущую сноску.

** Ср. п. **10**.

*** Ср. п. **11**.

Это уравнение имеет* общее решение

$$z = (x + C_1)^2 \ (x > -C_1). \tag{45}$$

Заменяя z на y', имеем:

$$y' = (x + C_1)^2 \ (x > -C_1). \tag{46}$$

Интегрируя это уравнение, получим общее решение уравнения (42) в виде:

$$y = \frac{1}{3} (x + C_1)^3 + C_2 \ (x > -C_1). \tag{47}$$

Уравнение (44) имеет** особое решение

$$z = 0. \tag{48}$$

Заменяя в нем z на y', имеем:

$$y' = 0. \tag{49}$$

Интегрируя это уравнение, получим еще семейство решений уравнения (42) в виде

$$y = C. \tag{50}$$

Каждое из них является особым (почему?).

93. Промежуточные интегралы. Первые интегралы. Чаще всего, интегрируя уравнение (2), мы приходим сначала к соотношению, содержащему произвольные постоянные и производные, но порядок старшей производной меньше n:

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, \ldots, C_k) = 0 \ (1 \leqslant k < n). \tag{51}$$

Такое соотношение называется *промежуточным интегралом* уравнения (2) или *интегралом k-го порядка.* Оно представляет собою дифференциальное уравнение порядка $n-k$, содержащее k произвольных постоянных. В процессе интегрирования уравнения (51) мы введем еще $n-k$ произвольных постоянных и получим соотношение, содержащее x, y и n произвольных постоянных, т. е. общий интеграл уравнения (2).

Если промежуточный интеграл имеет вид

$$\Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \tag{52}$$

т. е. содержит производную порядка $n-1$ и одну произвольную постоянную, то он называется *первым интегралом уравнения* (2).

Если известен один первый интеграл (52), *то интегрирование уравнения* (2) *сводится к интегрированию уравнения* ($n-1$)*-го порядка.*

Если имеем два независимых первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \\ \Phi_1^{(2)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

то, исключая из них $y^{(n-1)}$, получим промежуточный интеграл вида:

$$\Phi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0, \tag{54}$$

---

* См. п. **11**.

** См. предыдущую сноску.

так что дело сводится к интегрированию уравнения порядка $n-2$.

Знание $k\,(1 \leqslant k < n)$ независимых первых интегралов позволяет понизить порядок уравнения на k единиц.

Наконец, *если мы имеем n независимых первых интегралов, то, исключая из них y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, мы получим:*

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)=0, \tag{55}$$

т. е. общий интеграл.

94. Замечание об уравнении n-го порядка, не разрешенном относительно старшей производной. Пусть дано уравнение (1),

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0,$$

не разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)}$. Предположим, что разрешая его, получаем конечное или бесконечное число значений для $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f_k(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{56}$$

Совокупность общих интегралов уравнений (56) будем называть *общим интегралом* уравнения (1).

В некоторых случаях удается проинтегрировать уравнение (1) и не производя фактического разрешения его относительно $y^{(n)}$. Если при этом получается n — параметрическое семейство интегральных кривых в виде, разрешенном или неразрешенном относительно y, то будем его называть соответственно *общим решением,* или *общим интегралом,* уравнения (1).

Задача Коши для уравнения (1) ставится так же, как и для уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Если начальным данным x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$, и каждому из значений $y^{(n)}$, определяемых из уравнения

$$F(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)},\ y^{(n)})=0, \tag{57}$$

соответствует только одно решение, то говорят, что задача Коши имеет единственное решение. В противном случае говорят, что единственность решения задачи Коши нарушена.

Теорема, доказанная в гл. II, п. **66**, переносится и на уравнение n-го порядка (1).

Теорема. *Если функция $F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})$ удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *определена и непрерывно дифференцируема вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки* $(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)},\ y_0^{(n)})$;

2) $F(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)},\ y_0^{(n)})=0$;

3) $F'_{y^{(n)}}(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)},\ \ldots,\ y_0^{(n)})\neq 0$,

то уравнение (1) *имеет единственное решение $y=(x)$, опреде-*

ленное и n раз непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x = x_0$, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0$, $y' = y_0'$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$ *и такое, что* $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$.

Для доказательства нужно, так же как и в гл. II, п. **66**, воспользоваться теоремой о существовании неявной функции от нескольких переменных и теоремой Пикара, сформулированной в п. **86**.

Если в каждой точке решения $y = y(x)$ имеет место единственность решения задачи Коши, то оно называется *частным* решением.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*. Уравнение (1), так же как и уравнение, разрешенное относительно старшей производной, может допускать семейство особых решений, зависящее от $n - 1$ произвольных постоянных.

Кривые, подозрительные на особое решение уравнения (1), можно найти по аналитическому виду функции F, если предположить, что она непрерывно дифференцируема по всем аргументам в рассматриваемой области. Тогда, в силу приведенной выше теоремы, особыми решениями могут быть только те кривые, для которых

$$F = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \tag{58}$$

Уравнения (58) и определяют кривые, подозрительные на особое решение.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ, И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА*

95. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка n. В настоящем параграфе мы укажем некоторые типы уравнений n-го порядка, общее решение (общий интеграл) которых можно найти при помощи квадратур. При этом мы ограничиваемся формальным интегрированием рассматриваемых уравнений. Приведение к квадратурам выполняется либо при помощи специальных способов, применяемых непосредственно к данному уравнению, либо путем предварительного понижения порядка уравнения, если получаемое при этом уравнение интегрируется в квадратурах.

Заметим, что понижение порядка часто оказывается полезным и в тех случаях, когда получаемое уравнение не удается проинтегрировать в квадратурах, ибо получаемое уравнение

* Здесь речь будет идти, главным образом, о нелинейных уравнениях. Линейные уравнения будут специально рассмотрены в главах VI—VIII.

связывает дифференциальные свойства более низкого порядка, чем свойства, выражаемые данным уравнением.

Далее, численное и графическое интегрирование дифференциальных уравнений производится тем легче, чем ниже порядок уравнения. Поэтому, прежде чем интегрировать уравнение численно или графически, стараются понизить его порядок.

Мы рассмотрим сначала (пп. **95—97**) неполные уравнения. Простейшими из них являются уравнения, содержащие только независимую переменную и производную порядка n. Будем различать два случая.

1. Если уравнение порядка n может быть написано в виде

$$y^{(n)} = f(x), \tag{1}$$

где функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то она легко интегрируется в квадратурах.

Действительно, так как $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$, то мы можем переписать уравнение (1) так:

$$[y^{n-1}]' = f(x),$$

откуда:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C_1, \tag{2}$$

где C_1 — произвольная постоянная, а x_0 — любое фиксированное число из промежутка (a, b).

Аналогичными рассуждениями находим:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx\, dx + C_1(x - x_0) + C_2, \tag{2_1}$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx\, dx\, dx + \frac{C_1}{2}(x - x_0)^2 + C_2(x - x_0) + C_3, \tag{2_2}$$

. . . .

$$y' = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x}^{x}}_{(n-1)\ \text{раз}} f(x)\, dx\, dx \ldots dx + \frac{C_1}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} +$$

$$+ \frac{C_2}{(n-3)!}(x - x_0)^{(n-3)} + \frac{C_3}{(n-4)!}(x - x_0)^{n-4} + \ldots + C_{n-1}, \tag{2_{n-2}}$$

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{раз}} f(x)\, dx\, dx \ldots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\frac{C_3}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3}+\ldots+$$

$$+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \qquad (2_{n-1})$$

Последняя формула содержит в себе **все** решения уравнения (1) и дает **общее решение** этого уравнения в области

$$a<x<b, \quad -\infty<y<+\infty, \quad -\infty<y'<+\infty, \ \ldots,$$

$$-\infty<y^{(n-1)}<+\infty. \qquad (3)$$

Она позволяет найти решение с любыми начальными значениями искомой функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно:

$$y=y_0, \quad y'=y_0', \ \ldots, \ y^{(n-3)}=y_0^{(n-3)}, \quad y^{(n-2)}=y_0^{(n-2)},$$

$$y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \qquad (4)$$

при $x=x_0$, где x_0 принадлежит интервалу (a, b). Для определения соответствующих значений произвольных постоянных положим в формулах (2), (2_1), (2_2), ..., (2_{n-2}), (2_{n-1}) соответственно

$$y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \ y^{(n-2)}=y_0^{(n-2)}, \ y^{(n-3)}=y_0^{(n-3)}, \ldots, y'=y_0', \ y=y_0$$

и вместо x подставим всюду число x_0. Тогда получим:

$$y^{(n-1)}=C_1, \ y_0^{(n-2)}=C_2, \ y_0^{(n-3)}=C_3, \ \ldots, \ y_0'=C_{n-1}, \quad y_0=C_n. \qquad (5)$$

Подставив эти значения произвольных постоянных в формулу (2_{n-1}), мы и найдем искомое решение:

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)}+\ldots+y_0'(x-x_0)+y_0. \qquad (6)$$

Если в полученной формуле считать $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными числами, то она представляет собою **общее решение** уравнения (1) в области (3). Здесь роль произвольных постоянных играют **начальные значения** искомой функции и ее производных до порядка $n-1$ включительно, так что, при сделанном предположении, (6) является **общим решением в форме Коши.**

Заметим, что функция

$$Y_1=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx \qquad (7)$$

является, очевидно, решением уравнения (1) и представляет собою частное решение этого уравнения, так как оно получается из общего решения (2_{n-1}) при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Это частное решение, очевидно, удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$Y_1(x_0) = 0, \quad Y_1'(x_0) = 0, \ldots, Y_1^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{8}$$

В дальнейшем такие начальные условия мы будем называть *нулевыми.*

Формула (7) содержит n квадратур. Однако их можно заменить одной квадратурой, а именно, можно показать, что имеет место следующая *формула Коши**:

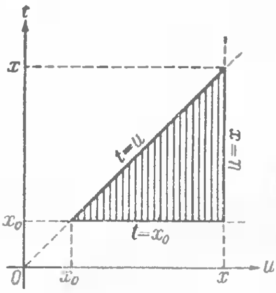


Рис. 33

$$Y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{9}$$

В самом деле, мы можем рассматривать интеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)\,dt$$

как повторный, равный соответствующему двойному интегралу по области, ограниченной прямыми (рис. 33):

$$u = x, \quad t = x_0, \quad t = u. \tag{10}$$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_{t}^{x} du = \int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)\,dt. \tag{11}$$

Поэтому:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)\,dt. \tag{12}$$

Аналогично находим:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx\,dx = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)\,(u-t)\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_{t}^{x} (u-t)\,du = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^2\,dt; \tag{12_1}$$

* Эта формула есть частный случай формулы Коши для неоднородного линейного уравнения (см. п. 172 (28)).

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\;dx\,dx\,dx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} du \int\limits_{x_0}^{u} f(t)\,(u-t)^2\;dt =$$

$$= \frac{1}{3!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^3\;dt; \qquad (12_2)$$

. . . .

$$Y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \dots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\;dx\,dx \dots dx =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\;dt. \qquad (12_{n-2})$$

Теперь мы можем записать общее решение (6) в виде

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\;dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}\,(x-x_0)^{n-2} + \dots + y_0'\,(x-x_0) + y_0{}^*, \qquad (13)$$

где $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — произвольные постоянные числа.

Пример 1. Найти движение, определяемое дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) \qquad (14)$$

и начальными условиями:

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (15)$$

Согласно формуле (9) искомым движением будет

$$x = \int\limits_{0}^{t} f(z)\,(t-z)\;dz. \qquad (16)$$

Общее решение уравнения (1) можно также найти последовательным интегрированием этого уравнения, беря вместо определенных интегралов с переменным верхним пределом неопределенные интегралы. Будем иметь:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\;dx + C_1 \equiv f_1(x) + C_1, \qquad (2')$$

$$y^{(n-2)} = \int f_1(x)\;dx + C_1x + C_2 \equiv f_2(x) + C_1x + C_2, \qquad (2_1')$$

$$y^{(n-3)} = \int f_2(x)\;dx + \frac{C_1}{2}\;x^2 + C_2x + C_3 \equiv f_3(x) +$$

$$+ \frac{C_1}{2}\;x^2 + C_2x + C_3, \qquad (2_2')$$

. . . .

---

* По существу, эта формула является представлением решения уравнения (1) по известной формуле Тэйлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла.

$$y = \int f_{n-1}(x)\,dx + \frac{C_1}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}\,x^{n-2} + \\ + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \qquad (2'_{n-1})$$

Пример 2. Среди всех интегральных кривых уравнения

$$y'' = 6x \qquad (17)$$

выделить ту, которая касается в начале координат прямой $y = x$*.

Задача сводится к нахождению решения уравнения (17), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = 0, \quad y' = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \qquad (18)$$

Найдем сначала общее решение. Интегрируя последовательно уравнение (17), имеем:

$$y' = 3x^2 + C_1,$$
$$y = x^3 + C_1x + C_2.$$

Удовлетворяя начальным условиям (18), находим, что $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, так что искомой интегральной кривой будет:

$$y = x^3 + x. \qquad (19)$$

Заметим, что начальным условиям (18) можно удовлетворять и в процессе последовательного интегрирования уравнения (17). Поступая таким образом, мы сначала будем иметь:

$$y' = 3x^2 + C_1.$$

Но $y' = 1$ при $x = 0$. Поэтому $C_1 = 1$. Дальше нужно интегрировать уравнение

$$y' = 3x^2 + 1.$$

Получаем:

$$y = x^3 + x + C_2.$$

Но $y = 0$ при $x = 0$. Поэтому $C_2 = 0$, и мы приходим к решению (19).

2°. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение порядка n имеет вид

$$F(x,\ y^{(n)}) = 0, \qquad (20)$$

причем оно неразрешимо (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$ (или же выражение для $y^{(n)}$ получается слишком сложным).

Покажем, как можно построить общее решение уравнения (20) в параметрической форме, в предположении, что это уравнение допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \qquad (21)$$

где функция $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ таковы, что $F[\varphi(t),\ \psi(t)] \equiv 0$**.

---

* Ср. п. **87**, пример 1.
** Ср. п. **71** (10).

Выразим y через параметр t. Так как

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = \psi(t)\;\varphi'(t)\;dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\;\varphi'(t)\;dt + C_1 \equiv \psi_1(t,\;C_1). \tag{22}$$

Теперь имеем:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\;dx = \psi_1(t,\;C_1)\;\varphi'(t)\;dt.$$

Откуда

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t,\;C_1)\;\varphi'(t)\;dt + C_2 = \psi_2(t,\;C_1,\;C_2). \tag{22_1}$$

Продолжая эти рассуждения, найдем:

$$y = \psi_n(t,\;C_1,\;C_2,\;\ldots,\;C_n). \tag{22_{n-1}}$$

Следовательно, *общее решение* уравнения (20) *в параметрической форме* имеет вид

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi_n(t,\;C_1,\;C_2,\;\ldots,\;C_n). \tag{23}$$

Отметим *два частных случая, в которых удается легко получить параметрическое представление уравнения* (20).

а. Уравнение (20) разрешимо относительно независимой переменной, т. е. представимо в виде*:

$$x = \varphi(y^{(n)}). \tag{24}$$

В этом случае, полагая $y^{(n)} = \psi(t)$, получаем:

$$x = \varphi[\psi(t)],\;\; y^{(n)} = \psi(t). \tag{25}$$

Формулы (25) и дают параметрическое представление уравнения (24).

Если в качестве функции $\psi(t)$ взять сам параметр t, т. е. принять за параметр производную $y^{(n)}$, то будем иметь следующее параметрическое представление уравнения (24):

$$x = \varphi(t),\;\; y^{(n)} = t. \tag{25'}$$

Заметим, однако, что здесь, так же как и в случае соответствующего уравнения первого порядка** не всегда целесообразно принимать за параметр производную. Иногда оказывается выгоднее воспользоваться более общим параметрическим представлением (25), выбрав удачным образом функцию $\psi(t)$.

б. Уравнение (20) имеет вид:

$$P(x,\;y^{(n)}) + Q(x,\;y^{(n)}) = 0, \tag{26}$$

где P и Q—однородные функции соответственно измерений k и m.

---

* Ср. п. **71** (17).

** См. предыдущую сноску.

Для нахождения параметрического представления уравнения (26) поступаем так же, как и в случае соответствующего уравнения первого порядка*.

Полагая в уравнении (26)

$$y^{(n)} = tx \tag{27}$$

и разрешая полученное уравнение относительно x, выразим x через параметр t, $x = \varphi(t)$. Подставляя это выражение для x в формулу (27), найдем выражение $y^{(n)}$ через t, $y^{(n)} = t\varphi(t)$. Таким образом, параметрическим представлением уравнения (26) будет

$$x = \varphi(t),\ y^{(n)} = t\varphi(t). \tag{28}$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение вида (24):

$$e^{y''} + y'' = x. \tag{29}$$

Приняв y'' за параметр, т. е. положив $y'' = t$, получим $x = e^t + t$, так что уравнение (29) допускает параметрическое представление вида

$$x = e^t + t,\quad y'' = t. \tag{30}$$

Выразим y через параметр t. Имеем:

$$dy' = y''\,dx = t\,(e^t + 1)\,dt.$$

Отсюда:

$$y' = \int t\,(e^t + 1)\,dt + C_1 = (t - 1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1. \tag{31}$$

Далее,

$$dy = y'\,dx = \left[(t - 1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt,$$

так что

$$y = \int \left[(t - 1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt + C_2 =$$

$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \tag{31_1}$$

Следовательно, общее решение уравнения (29) имеет вид:

$$x = e^t + t,\ y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \tag{32}$$

96. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных. Далее мы рассмотрим *несколько типов уравнений, допускающих понижение порядка.*

Пусть дано уравнение вида

$$F\,(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0\ \ (1 \leqslant k < h), \tag{33}$$

---

* См. п. 71, уравнение (22).

причем производная k-го порядка обязательно входит в уравнение.

Введем новую неизвестную функцию z, положив

$$y^{(k)} = z. \tag{34}$$

Тогда уравнение (33) перепишется так:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{35}$$

Это уравнение $(n-k)$-го порядка. Нам удалось, таким образом, *понизить порядок уравнения* (33) *на k единиц*.

Предположим, что, решая полученное уравнение, мы найдем его общее решение

$$z = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}). \tag{36}$$

Тогда мы имеем:

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}). \tag{37}$$

Мы получили уравнение уже рассмотренного выше типа. Интегрируя его, введем еще k произвольных постоянных. Получим:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{38}$$

Если вместо общего решения (36) мы получаем общий интеграл

$$\Omega(x, z, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0, \tag{39}$$

то, заменяя z его значением из подстановки (34), мы приходим к уравнению

$$\Omega(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0. \tag{40}$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (20). Если оно допускает параметрическое представление, то мы получим его общее решение (в параметрической форме) при помощи k квадратур, которые введут еще k произвольных постоянных.

Пример 1. Дано уравнение

$$4y' + y''^2 = 4xy''. \tag{41}$$

Положим $y' = z$. Тогда

$$4z + z'^2 = 4xz',$$

или

$$z = xz' - \frac{z'^2}{4}. \tag{42}$$

Это — уравнение Клеро. Его общее решение имеет вид:

$$z = Cx - \frac{C^2}{4}.$$

Поэтому

$$y' = Cx - \frac{C^2}{4},$$

откуда:

$$y = C_1 x (x - C_1) + C_2 \left(C_1 = \frac{C}{2}\right). \tag{43}$$

Это и есть общее решение уравнения (41).

Уравнение (42) имеет особое решение $z = x^2$. Ему соответствует уравнение $y' = x^2$. Поэтому

$$y = \frac{x^3}{3} + C', \tag{44}$$

где C' — произвольная постоянная, также является решением уравнения (41). Легко видеть, что это решение особое.

Отметим *два частных случая уравнения вида* (33).

1. Уравнение вида

$$F(y^{(n-1)}, \ y^{(n)}) = 0. \tag{45}$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}). \tag{46}$$

Полагая $y^{(n-1)} = z$, получаем $z' = f(z)$, откуда $\frac{dz}{f(z)} = dx$, $z = \omega(x, C_1)$, $y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$. Это — уравнение вида (1).

Если уравнение (45) не разрешимо (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$, но допускает *параметрическое представление:*

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \tag{47}$$

то из соотношения $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ находим (используя (47)), что

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)},$$

откуда:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C_1. \tag{48}$$

Присоединяя сюда параметрическое выражение $y^{(n-1)}$, получаем:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C_1, \quad y^{(n-1)} = \varphi(t), \tag{21'}$$

откуда, так же как из (21), находим параметрическое выражение для y:

$$y = \varphi_n(t, \ C_2, \ C_3, \ \ldots, \ C_n), \tag{49}$$

так что x и y выражаются через параметр t и n произвольных постоянных, т. е. мы получаем общее решение в параметрической форме.

2. Уравнение вида

$$F(y^{(n-2)}, \ y^{(n)}) = 0. \tag{50}$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно y :

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right). \tag{51}$$

Положим $y^{(n-2)} = z$. Тогда:

$$z'' = f(z). \tag{52}$$

Умножим обе части этого уравнения на $2z'dx$:

$$2z' \cdot z''\, dx = 2f(z) \cdot z'\, dx.$$

Переписав полученное уравнение в виде

$$d(z'^2) = 2f(z)\, dz$$

и интегрируя, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &z'^2 = 2\int f(z)\, dz + C_1, \quad z' = \sqrt{2\int f(z)\, dz + C_1},^* \\ &\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\, dz + C_1}} = dx, \\ &z = \varphi(x, C_1, C_2). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Следовательно,

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2). \tag{54}$$

Это — уравнение вида (1).

Предположим, что уравнение (50) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает *параметрическое представление*:

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t). \tag{55}$$

Имеем:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\, dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\, dx.$$

Умножая обе части первого уравнения на $y^{(n-1)}$, заменяя справа $y^{(n-1)}\, dx$ на $dy^{(n-1)}$, получаем:

$$y^{(n-1)}\, dy^{(n-2)} = y^{(n)}\, dy^{(n-2)}$$

или

$$d\,[y^{(n-1)}]^2 = 2\psi(t)\, \varphi'(t)\, dt,$$

откуда:

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C_1} \equiv \psi_1(t, C_1). \tag{56}$$

Присоединяя сюда $y^{(n-2)} = \varphi(t)$, получим формулы типа (47). Дальнейшие квадратуры введут $n-1$ новых произвольных постоянных.

97. Уравнение, не содержащее независимой переменной. Это уравнение имеет вид:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{57}$$

* Здесь и в (56) имеются в виду оба значения корня.

Введем новую искомую функцию z по формуле:

$$y' = z \tag{58}$$

и примем y за независимую переменную. Выразим $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ через функцию z и ее производные по y. Имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} z\right)\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z, \ldots,$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right). \tag{59}$$

Поэтому уравнение (57) примет вид:

$$F\left[y, z, \frac{dz}{dy} z, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right)\right] = 0. \tag{60}$$

Это уравнение порядка $n-1$. Если, решая его, мы найдем общее решение

$$z = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}), \tag{61}$$

то, возвращаясь к искомой функции y, получим уравнение:

$$y' = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}). \tag{62}$$

Проинтегрировав его, найдем общий интеграл уравнения (57).

Особые решения уравнения (60) могут привести к особым решениям уравнения (57) в силу подстановки (58).

Далее особые решения могут возникнуть вследствие интегрирования уравнения (62).

Наконец, мы могли потерять решения вида $y = \mathrm{const}$, принимая y за независимую переменную. Поэтому нужно положить в уравнении (57) $y = b$. Будем иметь:

$$F(b, 0, 0, \ldots, 0) = 0. \tag{63}$$

Если полученное уравнение имеет вещественные корни $b = b_i$, то уравнение (57) допускает решения вида $y = b_i$.

Пример. Дано уравнение

$$(1 + y^2)\, yy'' = (3y^2 - 1)\, y'^2. \tag{64}$$

Полагая $y' = z$ и принимая y за независимую переменную, имеем: $y'' = \frac{dz}{dy} z$, так что уравнение (64) примет вид:

$$(1 + y^2)\, y \frac{dz}{dy} z = (3y^2 - 1)\, z^2. \tag{65}$$

Сократим на z (при этом равенство $z = 0$ дает $y = \mathrm{const}$, что мы пока отбросим, ибо приняли y за независимую переменную):

$$(1 + y^2)\, y \frac{dz}{dy} = (3y^2 - 1)\, z. \tag{66}$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y}\, dy. \qquad (67)$$

Отсюда, интегрируя, найдем:

$$\ln|z| = 2\ln(1 + y^2) - \ln|y| + \ln|C_1| \qquad (68)$$

или

$$\frac{zy}{(1 + y^2)^2} = C_1. \qquad (69)$$

Возвращаясь к функции y, получим:

$$\frac{yy'}{(1 + y^2)^2} = C_1. \qquad (70)$$

Это есть *первый интеграл* уравнения (64).

Интегрируя еще раз, найдем *общий интеграл*

$$\frac{1}{1 + y^2} = -2C_1x + C_2, \qquad (71)$$

или

$$\frac{1}{1 + y^2} = Ax + B, \qquad (72)$$

где $A = -2C_1$, $B = C_2$. Положим теперь в уравнении (64) $y = b$. Получим:

$$(1 + b^2)\, b\cdot 0 = (3b^2 - 1)\cdot 0. \qquad (73)$$

Так как любое b удовлетворяет этому уравнению, то уравнение (64) допускает семейство решений $y = C$, где C — произвольное постоянное число.

98. Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных. Так называется уравнение

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \qquad (74)$$

в котором F есть *однородная функция относительно* $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$, т. е. при всяком t имеет место тождество:

$$F(x,\ ty,\ ty',\ \ldots,\ ty^{(n)}) = t^m F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}). \qquad (75)$$

Введем *новую неизвестную функцию* z, положив

$$\frac{y'}{y} = z. \qquad (76)$$

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} &y' = yz,\ y'' = y'z + yz' = (yz)\,z + yz' = y\,(z^2 + z'),\\ &y''' = y\,(z^3 + 3zz' + z''),\ \ldots,\ y^{(n)} = y\,\omega\,(z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Поэтому уравнение (74) примет вид

$$F\,[x,\ y,\ yz,\ y\,(z^2 + z'),\ \ldots,\ y\,\omega\,(z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)})] = 0. \qquad (78)$$

Воспользуемся теперь свойством однородности функции F. В нашем случае роль t играет y, поэтому можем переписать

(78) так:

$$y^m F[x, 1, z, z^2+z', \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})] = 0. \qquad (79)$$

Сокращая на y^m (при этом мы можем потерять решение $y=0$, если $m>0$, однако из дальнейшего будет видно, что этого не случится), получаем уравнение $(n-1)$-го порядка с искомой функцией z.

Если мы сможем найти общее решение полученного уравнения в виде

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \qquad (80)$$

то, заменяя z на $\frac{y'}{y}$, будем иметь:

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \qquad (81)$$

Следовательно,

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx}. \qquad (82)$$

Это и есть общее решение уравнения (74).

Решение $y=0$ содержится в формуле (82) при $C_n=0$.

Пример. Дано уравнение

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0. \qquad (83)$$

Полагая $\frac{y'}{y} = z$, имеем: $y' = yz$, $y'' = y(z^2+z')$. Поэтому уравнение (83) перепишется так:

$$xy^2(z^2+z') + xy^2z^2 - y^2z = 0. \qquad (84)$$

Сокращая на y^2, получаем:

$$2xz^2 + xz' - z = 0. \qquad (85)$$

Это уравнение делением на x, приводится к уравнению Бернулли. Интегрируя его, получаем:

$$\frac{x}{x^2+C_1}. \qquad (86)$$

Заменяя z на $\frac{y'}{y}$, будем иметь:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+C_1}. \qquad (87)$$

Интегрируя еще раз, получаем:

$$y = C_2\sqrt{x^2+C_1}. \qquad (88)$$

Уравнение (83) имеет решения $y=C$, не содержащиеся (при $C \neq 0$) в формуле (88).

99. Обобщенное однородное уравнение*. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (89)$$

* Ср. п. 73.

в котором левая часть становится *однородной* функцией всех своих аргументов, если считать $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ соответственно величинами первого, k-го, $(k-1)$-го, . . ., $(k-n)$-го измерений, т. е.

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \ldots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{90}$$

Такое уравнение называется *обобщенным однородным.*

Для интегрирования уравнения (89) введем вместо x и y новые переменные t и z, положив*

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}. \tag{91}$$

Выразим производные от старой искомой функции y по старой независимой переменной x через производные от новой искомой функции z по новой независимой переменной t.

Прежде всего, так же как и в п. **73**, будем иметь:

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \tag{92}$$

так что *производная от y по старой независимой переменной x равна производной от y по новой независимой переменной t, умноженной на e^{-t}.* Дифференцируя по t вторую из формул (91), находим:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{kt}. \tag{93}$$

Подставляя это в (92), имеем:

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}. \tag{94}$$

Мы получили выражение первой производной от y по x через первую производную от z по t.

Аналогично находим:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right] e^{(k-2)t}, \tag{94$_1$}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} e^{-t} =$$

$$= \left\{\frac{d^3z}{dt^3} + (3k-3)\frac{d^2z}{dt^2} + [k(k-1) + (k-2)(2k-1)]\frac{dz}{dt} + \right.$$

$$\left. + k(k-1)(k-2)z\right\} e^{(k-3)t} \tag{94$_2$}$$

и т. д. Наконец,

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right) e^{(k-n)t}. \tag{94$_{n-1}$}$$

---

* Ср. п. 73 (47).

Выполняя теперь в уравнении (89) подстановку (91) и заменяя при этом производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ их выражениями из формул (94), (94_1), ..., (94_{n-1}), получим уравнение вида:

$$F\left[e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt}+kz\right)e^{(k-1)t}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(k-n)t}\right]=0. \tag{95}$$

Выносся, согласно (90), за знак функции F множитель e^{mt} и сокращая на него, получим уравнение n-го порядка:

$$F\left[1, z, \frac{dz}{dt}+kz, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)\right]=0. \tag{96}$$

Это уравнение не **содержит независимой переменной** t и потому, согласно п. **97**, **допускает понижение порядка на единицу**.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^3y''+2xyy'-x^2y'^2-y^2=0. \tag{97}$$

Считая x, y, y' и y'' соответственно величинами первого, k-го, $(k-1)$-го и $(k-2)$-го измерений, составляем условие, определяющее k, т. е. условие, при котором, все члены будут одного измерения. Первый член x^3y'' имеет измерение $3+(k-2)$, ибо x^3 имеет измерение 3, а y'' — измерение $(k-2)$. Измерение второго члена $2xyy'$ равно $1+k+(k-1)$. Третий член $(-x^2y'^2)$ имеет измерение $2+2(k-1)$. Наконец, измерение последнего члена $(-y^2)$ равно $2k$. Приравнивая все эти измерения, получаем условие, определяющее k:

$$1+k=2k=2k=2k. \tag{98}$$

Это условие будет выполнено при $k=1$. Следовательно, уравнение (97) является **обобщенным однородным**.

Делаем подстановку:

$$x=e^t, \quad y=z\,e^t. \tag{99}$$

Тогда:

$$y'=\frac{dy}{dt}\,e^{-t}=\frac{dz}{dt}+z, \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\,e^{-t}=\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\right)e^{-t},$$

так что после подстановки получим:

$$e^{3t}(z''+z')\,e^{-t}+2e^tze^t(z'+z)-e^{2t}(z'+z)^2-z^2e^{2t}=0$$

или

$$z''+z'-z'^2=0. \tag{100}$$

Это уравнение не содержит независимой переменной t. Положим $z'=u$ и примем z за независимую переменную. Тогда $z''=u'u$ и мы имеем

$$u'u+u-u^2=0.$$

Сократив на u, получаем:

$$u'+1-u=0 \quad (u=0?);$$

откуда

$$u=C_1e^z+1;$$

но $u=z'$, поэтому

$$z'=C_1e^z+1.$$

Интегрируя, находим:

$$C_2 (C_1 + e^{-z}) = e^{-t},$$

откуда

$$z = \ln \frac{C_2 e^t}{1 - C_1 C_2 e^t}. \tag{101}$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим общее решение уравнения (97) в виде:

$$y = x \ln \frac{C_2 x}{1 - C_1 C_2 x}$$

или

$$y = x \ln \frac{A_1 x}{1 + A_2 x} \quad (A_1 = C_2, \quad A_2 = -C_1 C_2). \tag{102}$$

Равенство $u = 0$ приводит к семейству частных решений

$$y = Cx \ (x \neq 0).$$

Особых решений нет (почему?).

100. Уравнение, левая часть которого есть точная производная. Предположим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{103}$$

представляет собою точную производную по x от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, зависящей от переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{104}$$

или

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \ldots + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \tag{105}$$

причем написанное равенство выполняется тождественно относительно всех переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Тогда ясно, что уравнение (103) имеет первый интеграл

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1, \tag{106}$$

так что порядок этого уравнения понизился на единицу.

Пример 1. Дано уравнение

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y' y''}{1 + y'^2} = 0. \tag{107}$$

Здесь

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y' y''}{1 + y'^2} = \frac{d}{dx} \left[\ln |y''| - \frac{3}{2} \ln (1 + y'^2) \right], \tag{108}$$

т. е. левая часть уравнения (107) есть точная производная. Поэтому уравнение (107) допускает первый интеграл

$$\ln |y''| - \frac{3}{2} \ln (1 + y'^2) = \ln |C_1|, \tag{109}$$

или

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = 0. \tag{110}$$

Левая часть полученного уравнения снова есть точная производная, ибо

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x\right). \tag{111}$$

Следовательно,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x = C_2. \tag{112}$$

Это есть интеграл второго порядка уравнения (107).

Интегрируя уравнение (112), получим общий интеграл уравнения (107) в виде*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \left(a = -\frac{C_2}{C_1},\ b = \frac{C_3}{C_1},\ R = \frac{1}{C_1}\right). \tag{113}$$

Если левая часть уравнения (103) не является точной производной, то в некоторых случаях удается найти такую функцию $\mu = \mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, что после умножения на нее левая часть этого уравнения становится точной производной. Эта функция называется *интегрирующим множителем* уравнения (103).

Так же, как и для уравнения первого порядка [59] *знание функции μ дает возможность не только найти первый интеграл, но также и особые решения.* Последние представляют собою решения уравнения $\frac{1}{\mu} = 0$.

Мы не будем касаться вопроса о нахождении функции μ в общем случае, а ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y''y + 2y^2 y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0. \tag{114}$$

Умножая обе части на функцию $\mu = \frac{1}{yy'}$, получаем:

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0 \quad (yy' = 0?) \tag{115}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|\right] = 0, \tag{116}$$

так что левая часть уравнения (115) является точной производной, а равенство

* Ср. Введение, пример 4.

$$\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x| = \ln|C_1| \quad \text{или} \quad e^{y^2} yy' - C_1x^2 = 0 \tag{117}$$

есть **первый интеграл**. Далее имеем

$$e^{y^2} yy' - C_1x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\, e^{y^2} - \frac{C_1}{3}\, x^3\right). \tag{118}$$

Поэтому равенство

$$\frac{1}{2}\, e^{y^2} - \frac{C_1}{3}\, x^3 = C_2 \tag{119}$$

является **общим интегралом** уравнения (114). Особых решений нет, так как уравнение $yy' = 0$ приводит к решениям $y = C$, которые содержатся в общем интеграле.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

§ 1. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

101. Понятие о нормальной системе. Линейная система. Совокупность соотношений вида

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ искомые функции от независимой переменной x, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка*. Будем предполагать функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ такими, что система (1) разрешима относительно производных от искомых функций:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Системы вида (2) называются *нормальными системами дифференциальных уравнений*. Число уравнений, входящих в систему (2), называется *порядком* этой системы. Согласно этому определению, система (2) есть система *n-го порядка*. В этом параграфе мы будем рассматривать исключительно нормальные системы.

Если правые части системы (2) зависят линейно от искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. если система (2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)\, y_1 + p_{12}(x)\, y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\, y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)\, y_1 + p_{22}(x)\, y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\, y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)\, y_1 + p_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\, y_n + f_n(x), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $p_{kl}(x)$ $(k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и $f_k(x)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ суть заданные функции от x, то она называется *линейной системой дифференциальных уравнений* или, короче, *линейной системой*. Теория линейных систем изложена в главах IX—XI.

Если правые части системы (2) не зависят (явно) от независимой переменной x, т. е. если система (2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

то она называется *автономной* или *стационарной системой*.

102. Решение системы. Всякая совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \qquad (4)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b)*, называется *решением* системы (2) в этом интервале, если она обращает все уравнения системы (2) в тождества**:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &\equiv f_1[x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)], \\ y_2'(x) &\equiv f_2[x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) &\equiv f_n[x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)], \end{aligned}\right\}$$

справедливые при всех значениях x из интервала (a, b).

---

* См. сноску на стр. 14.

** См. замечание в сноске на стр. 7 о том, как понимается тождество.

Пример. Дана система двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=5y+4z,\\ \frac{dz}{dx}&=4y+5z.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Легко убедиться, что совокупность функций

$$y_1=e^x, \quad z_1=-e^x$$

является решением этой системы в интервале $(-\infty, +\infty)$*. Действительно, заменяя в данной системе y и z соответственно на e^x и $-e^x$, мы получим тождества, справедливые при всех значениях x.

Система (5) имеет и другие решения. Например, решением будет

$$y_2=e^{9x}, \quad z_2=e^{9x} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

а также пара функций вида

$$\left.\begin{aligned}y&=C_1e^x+C_2e^{9x},\\ z&=-C_1e^x+C_2e^{9x}\end{aligned} \quad (-\infty<x<+\infty),\right\} \qquad (6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Чтобы убедиться в последнем, подставим (6) в систему (5). Из формулы (6) имеем:

$$\frac{dy}{dx}=C_1e^x+9C_2e^{9x},$$

$$\frac{dz}{dx}=-C_1e^x+9C_2e^{9x}.$$

Поэтому, подставляя (6) в систему (5), получим равенства:

$$\left.\begin{aligned}C_1e^x+9C_2e^{9x}&=5(C_1e^x+C_2e^{9x})+4(-C_1e^x+C_2e^{9x}),\\ -C_1e^x+9C_2e^{9x}&=4(C_1e^x+C_2e^{9x})+5(-C_1e^x+C_2e^{9x}),\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

которые выполняются тождественно относительно x при любых числовых значениях постоянных C_1 и C_2.

Мы рассмотрели конкретную систему двух уравнений и убедились, что она имеет решение, содержащее две произвольные постоянные. В дальнейшем мы увидим, что при некоторых условиях и вообще *нормальная система n уравнений допускает решение, содержащее n произвольных постоянных.*

Процесс нахождения решений системы (2) называется *интегрированием* этой системы. *Основной задачей интегрирования системы* (2) *является нахождение всех решений и изучение их свойств.*

103. Геометрическое истолкование нормальной системы. В п. 4 мы отметили, что уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, задает на плоскости (x, y) некоторое поле направлений и что направление касательной в каждой точке интегральной кривой совпадает с направлением поля

* Это и все другие решения системы (5) можно найти на основании общей теории, рассматриваемой в гл. X (см. п. **212**, пример 1).

в этой точке. Аналогичное геометрическое истолкование можно дать и нормальной системе n уравнений (2).

Будем рассматривать $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ как координаты точки в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда решению (4) соответствует некоторая кривая в указанном пространстве. Эта кривая называется *интегральной кривой* системы (2). Выясним геометрический смысл интегральных кривых.

Пусть правые части системы (2) определены и конечны в некоторой области G изменения переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Проведем в каждой точке области G отрезок, направляющие косинусы которого пропорциональны единице и значениям правых частей системы (2) в этой точке. Тогда получим так называемое *поле направлений*.

Всякая интегральная кривая системы (2) обладает тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с направлением поля, определяемым системой (2) в этой точке (почему?).

Если в точке $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ все правые части системы (2) или некоторые из них обращаются в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то будем говорить, что в этой точке поле не определено. Будем считать, что через такую точку не проходит ни одна интегральная кривая системы (2). Если интегральная кривая (4) обладает тем свойством, что

$$y_1(x) \to y_1^{(0)}, \quad y_2(x) \to y_2^{(0)}, \ldots, y_n(x) \to y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то будем говорить, что эта интегральная кривая *примыкает* к точке $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

104. Механическое истолкование нормальной системы. Примем в нормальной системе за независимую переменную t и обозначим искомые функции через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а правые части через $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда получим нормальную систему вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Решению

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t) \tag{9}$$

системы (8) соответствует движение точки в n-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это пространство называется *фазовым пространством* (в случае $n = 2$ — *фазовой плоскостью*), а кривая, описываемая в нем движущейся точкой, называется *траекто-*

рией движения. Взаимосвязь между траекторией и движением состоит в том, что траектория есть проекция движения [расположенного в пространстве $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$] в пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Уравнения (9) суть *параметрические уравнения траектории движения.* Эти уравнения не только определяют траекторию как геометрическое место точек, но, определяя положение точки на траектории в любой момент времени, они показывают, как происходит движение точки по траектории с течением времени. В дальнейшем мы будем называть решение (9) просто *движением.*

При этом не исключена возможность, что все функции $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в уравнениях движения (9) представляют собою постоянные величины:

$$x_1(t) \equiv x_1^{(0)}, \quad x_2(t) \equiv x_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_n(t) \equiv x_n^{(0)}. \tag{10}$$

В этом случае движение (9) вырождается в *состояние покоя:*

$$x_1 \equiv x_1^{(0)}, \; x_2 \equiv x_2^{(0)}, \; \ldots, \; x_n \equiv x_n^{(0)}, \tag{11}$$

а его траектория в точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Очевидно, что такой случай возможен тогда и только тогда, когда правые части системы (8) обращаются в нуль при всех рассматриваемых значениях времени t, если в них положить $x_1 = x_1^{(0)}, \; x_2 = x_2^{(0)}, \; \ldots, \; x_n = x_n^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} &X_1(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \equiv 0, \\ &X_2(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \equiv 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X_n(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

так, что скорость движения в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ все время равна нулю.

Пример 1. Для линейной системы вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)\, x_1 + p_{12}(t)\, x_2 + \ldots + p_{1n}(t)\, x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(t)\, x_1 + p_{22}(t)\, x_2 + \ldots + p_{2n}(t)\, x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}(t)\, x_1 + p_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{nn}(t)\, x_n \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

состоянием покоя будет

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad x_n \equiv 0. \tag{14}$$

В случае **автономной** системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

(т. е. когда правые части системы не зависят явно от времени) всякому решению системы

$$\left.\begin{aligned}X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\ X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

соответствует движение, вырождающееся в состояние покоя.

Система (8) определяет *поле скоростей* в той части пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где определены функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При этом, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ фиксированы, а t изменяется, то мы получаем картину изменения скорости в фиксированной точке. Если, в частности, система (8) автономная, так что она имеет вид (15), то в заданной точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с течением времени скорость не изменяется.

Основной задачей интегрирования системы (8) *является нахождение всех движений, определяемых этой системой и изучение их свойств.*

Пример 2. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x,\\ \frac{dy}{dt} &= 2y.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Эта система определяет семейство движений вида:

$$x = C_1e^t, \quad y = C_2e^{2t}, \qquad (18)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Траекториями этих движений служат полупараболы

$$y = Cx^2 \ (x \neq 0), \qquad (19)$$

где $C = \dfrac{C_2}{C_1^2}$, полуоси координат и начало координат. Они изображены схематически на рис. 34, где стрелки указывают направление движений при возрастании времени t.

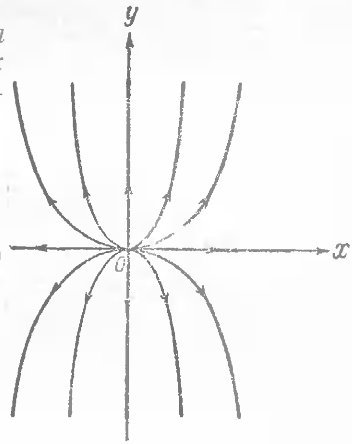


Рис. 34

105. Задача Коши. Для системы (2) *задача Коши* ставится следующим образом: среди всех решений системы (2) найти такое решение

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \tag{20}$$

в котором функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ принимают заданные числовые значения $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ при заданном числовом значении x_0 независимой переменной x:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \ y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{21}$$

так что решение (20) удовлетворяет условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ y_2 = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{22}$$

Здесь числа $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ называются *начальными значениями искомых функций* или *начальными значениями решения* (20), число x_0 — *начальным значением независимой переменной* x, числа x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ вместе взятые называются *начальными данными* решения (20), а условия (22) — *начальными условиями* этого решения.

Задачу Коши для системы (2) с начальными условиями (22) геометрически можно формулировать так: среди всех интегральных кривых системы (2) найти ту, которая проходит через заданную точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Например, решением задачи Коши для системы (5) с начальными условиями $y = 1$, $z = -1$ при $x = 0$ является пара функций $y = e^x$, $z = -e^x$. Геометрически этому решению соответствует интегральная кривая, проходящая через точку $(0, 1, -1)$.

Дадим механическое истолкование задачи Коши для нормальной системы. Рассмотрим систему вида (8)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}\right\}$$

В этом случае задача Коши состоит в том, чтобы из всех движений, определяемых системой (8), найти такое движение (9), в котором

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ x_2 = x_2^{(0)}, \ \ldots, \ x_n = x_n^{(0)} \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{23}$$

т. е. движущаяся точка находится в заданной точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ фазового пространства в заданный момент времени t_0. Точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ называется *начальной точкой*, а t_0 — *начальным моментом времени*. Числа t_0, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$

вместе называются *начальными данными* движения (9), а условия (23) — *начальными условиями* этого движения.

В связи с задачей Коши для системы (8) возникают следующие вопросы, имеющие большое теоретическое и практическое значение.

1. При каких условиях, наложенных на правые части системы (8), существует движение (9) с заданными начальными условиями (23)?

2. При каких условиях это движение является единственным, т. е. заданным начальным условиям (23) соответствует только одно движение (9), определяемое системой (8)?

3. Каковы свойства решения задачи Коши как функции от времени t, т. е. в каком интервале изменения времени определены функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, каков характер зависимости их от времени и каков их аналитический вид?

4. Каковы геометрические особенности поведения траектории движения, соответствующего решению задачи Коши, в фазовом пространстве?

5. Каковы свойства решения задачи Коши как функции начальных значений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, как изменяется движение (9) с изменением начальных значений?

Эти вопросы рассматриваются в гл. V.

Пример. Рассмотрим систему (17),

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Эта система определяет семейство движений (18)

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^{2t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Выделим движение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = 1, \quad y = 1 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{24}$$

т. е. движение, в котором движущаяся точка находится в точке (1, 1) в момент времени $t = 0$.

Подставляя в уравнения семейства движений $t = 0$, $x = 1$, $y = 1$, находим: $1 = C_1$, $1 = C_2$, так что искомым движением будет

$$x = e^t, \quad y = e^{2t}. \tag{25}$$

Траекторией этого движения служит полупарабола $y = x^2 (x > 0)$, причем из уравнений движения видно, что при $t > 0$ точка будет двигаться от точки (1, 1), удаляясь на ∞ с возрастанием t. Это видно также и из самой системы дифференциальных уравнений, ибо для $x > 0$, $y > 0$ имеем:

$$\frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0, \tag{26}$$

вследствие чего с увеличением времени t обе координаты x и y точки (x, y) тоже увеличиваются. При $t < 0$ точка движется от начала координат ($t = -\infty$) к точке (1,1).

При рассмотрении задачи Коши для системы (2), так же как и в случае одного дифференциального уравнения, возникают вопросы существования и единственности решения задачи Коши, а также вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной и как функции начальных данных.

Ответы на эти вопросы мы даем в гл. V. Оказывается, что *для существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для системы* (2) *достаточно предположить, что правые части этой системы непрерывны в окрестности начальных данных* (теорема Пеано).

106. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. В главе V мы докажем, что если правые части системы (2) удовлетворяют в окрестности начальных данных некоторым условиям, то существует единственное решение задачи Коши с этими начальными данными, определенное в некоторой окрестности начального значения независимой переменной, и что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами правых частей системы (2) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для системы (2) в упрощенной формулировке.

Теорема. *Пусть дана нормальная система* (2)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),
\end{aligned}\right\}$$

и поставлены начальные условия (22),

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \quad \textit{при} \quad x = x_0.$$

Предположим, что функции, стоящие в правых частях системы (2), *определены в некоторой замкнутой ограниченной области* R:

$$|x - x_0| \leqslant a,\ |y_k - y_k^{(0)}| \leqslant b\ (k = 1, 2,\ \ldots,\ n)$$

с точкой $(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$ *внутри* (a *и* b — *заданные положительные числа*) *и удовлетворяют в этой области следующим двум условиям:*

I. *Функции* $f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *непрерывны по всем своим аргументам и, следовательно, ограничены, т. е.:*

$$|f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)| \leqslant M \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{27}$$

где M — постоянное положительное число, а $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — любая точка области R.

II. *Функции $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеют ограниченные частные производные по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е.*

$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_l}\right| \leqslant K \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

где K — постоянное положительное число, а $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — любая точка области R.

При этих предположениях система (2) *имеет* ***единственное*** *решение* (20)

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям (22). *Это решение заведомо определено и непрерывно дифференцируемо* в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{29}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{30}$$

Из этой теоремы следует, что *если правые части системы* (2) *суть* ***полиномы*** *от своих аргументов, то какие бы начальные данные ни взять, существует единственное решение системы* (2) *с этими начальными данными.*

107. Общее решение.** Семейство решений системы (2), зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

называют обычно *общим решением* этой системы. **Геометрически** оно представляет собою семейство интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, зависящее от n параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причем уравнения этого семейства разрешены относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ниже мы даем определение общего решения системы (2) в области D изменения переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

В качестве области D мы будем рассматривать область в пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши для системы (2).

---

* Т. е. все функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ имеют непрерывные производные.

** Ср. п. 8.

Совокупность n функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

определенных в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, ..., C_n, имеющих непрерывные частные производные по x, будем называть *общим решением* системы (2) в области D, если система (32) разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в области D, так что при любых значениях $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, принадлежащих области D, системой (32) определяются значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ C_2 &= \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

и если совокупность n функций (32) является решением системы (2) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, доставляемых формулами (33), когда точка $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пробегает область D.

Формула общего решения (32) дает возможность за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ решить любую задачу Коши для системы (2) в области D, т. е. найти решение системы (2), определяемое начальными данными $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, причем $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — любая точка из D.

Для нахождения этого решения подставим в систему (32) вместо $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ начальные данные $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(0)} &= \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2^{(0)} &= \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(0)} &= \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Найдем из этой системы $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = C_1^{(0)}, \\ C_2 &= \psi_2(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = C_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = C_n^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Подставим эти значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в формулу общего решения (32). Получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x,\ C_1^{(0)},\ C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x,\ C_1^{(0)},\ C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n^{(0)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x,\ C_1^{(0)},\ C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными $x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}$ нет.

Иногда в формуле общего решения (32) роль произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ играют начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при некотором фиксированном значении x_0 аргумента x, так что формула (32) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x,\ x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x,\ x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x,\ x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Такая форма записи общего решения называется *общим решением в форме Коши.*

108. Частное решение*. Если решение системы (2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этой системы, то такое решение мы будем называть *частным решением.*

Решение, получающееся из формулы общего решения при частных числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, включая $\pm\infty$, будет, очевидно, частным решением.

Решая задачу Коши при помощи формулы общего решения всегда получаем частное решение.

109. Особое решение.** Решение системы (2), в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши для этой системы, будем называть *особым решением.*

Пример. Дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + \frac{2}{x}\,y - \sqrt{z}, \\ \frac{dz}{dx} &= 2\sqrt{z}, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $x \neq 0$.

Интегрируя второе уравнение, находим

$$z = (x + C_1)^2, \quad x > -C_1.$$

---

* Ср. п. **10**.

** Ср. п. **11**.

Подставим это выражение для z в первое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\, y - C_1.$$

Это уравнение линейное. Интегрируя его, получаем:

$$y = C_1 x + C_2 x^2. \tag{39}$$

Следовательно, система (38) имеет общее решение

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 x^2, \\ z &= (x + C_1)^2 \end{aligned}\right\} \quad (x > -C_1). \tag{40}$$

Второе из уравнений (38) имеет особое решение $z = 0$. Подставляя его в первое уравнение, получим

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{2}{x}\, y, \tag{41}$$

откуда

$$y = x^2\,(C + \ln|x|). \tag{42}$$

Таким образом, система (28) кроме общего решения (40) имеет еще семейство решений

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2\,(C + \ln|x|), \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Каждое из них является особым, ибо во всех точках каждого из этих решений нарушается единственность решения задачи Коши (почему?).

110. Понятие об интеграле нормальной системы. Первые интегралы. Общий интеграл. Число независимых интегралов. Рассмотрим одно из равенств (33):

$$\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i. \tag{44}$$

Функция $\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, стоящая в левой части равенства (44), обладает одним характерным свойством. Она обращается в постоянную при замене $y_1, \ldots, y_n$ любым частным решением системы (2), расположенным в области задания общего решения (32), т. е. мы имеем тождество:

$$\psi_i[x, \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)] \equiv C_i. \tag{45}$$

Всякая функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, обладающая таким свойством, называется *интегралом* системы (2).

Ниже речь идет о системах, для которых вся область существования и единственности совпадает с областью D определения некоторого общего решения.

Первое определение интеграла. Функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, не приводящаяся к постоянной, называется *интегралом* системы (2), если при замене $y_1, \ldots, y_n$ любым частным решением этой системы она обращается в постоянную.

Если функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, будучи интегралом системы (2) имеет непрерывные частные производные по $x, y_1, \ldots, y_n$, то вследствие того, что она вдоль любого частного решения обращается в постоянную, ее полный дифференциал $d\psi$ должен обращаться тождественно (относительно x) в нуль вдоль этого решения, т. е.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\,dy_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\,dy_n \equiv 0 \tag{46}$$

вдоль любого частного решения. Но вдоль решения мы имеем:

$$dy_k \equiv f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Поэтому предыдущее тождество можно переписать так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\,f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx + \\ + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\,f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx \equiv 0. \tag{48}$$

Таким образом, если интеграл $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, то он обладает тем свойством, что его полный дифференциал обращается тождественно в нуль в с и л у с и с т е м ы (2), т. е. при замене $dy_1, \ldots, dy_n$ их значениями из системы (2).

В т о р о е о п р е д е л е н и е и н т е г р а л а. Функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, имеющая непрерывные частные производные по $x, y_1, \ldots, y_n$, и такая, что в рассматриваемой области $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ не обращаются одновременно в нуль, называется *интегралом* системы (2), если полный дифференциал этой функции обращается тождественно в нуль в с и л у с и с т е м ы (2), т. е. имеет место тождество (48). Деля обе части этого тождества на dx, получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\,f_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\,f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0, \tag{49}$$

так что полная частная производная от функции ψ по x тождественно равна нулю в с и л у с и с т е м ы (2), т. е. при замене $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ правыми частями этой системы.

Ясно, что функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, являющаяся интегралом системы (2) в смысле второго определения, будет интегралом этой системы и в смысле первого определения.

Обратное неверно, ибо функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, являющаяся интегралом системы (2), в смысле первого определения, может не иметь частных производных по всем своим аргументам.

Равенство

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C, \tag{50}$$

где $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — интеграл системы (2) в смысле первого или второго определения, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

Например, каждое из равенств (33) является первым интегралом системы (2).

Совокупность n первых интегралов (33) обладает тем свойством, что она разрешима относительно искомых функций $y_1, \ldots, y_n$, причем в результате этого мы получаем общее решение (32) системы (2) в области D. Всякую совокупность n первых интегралов, обладающую таким свойством, будем называть *общим интегралом* системы (2) в области D.

Первые интегралы (33), образующие общий интеграл системы (2), обладают тем свойством, что интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *независимы*, т. е. между функциями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ не существует соотношения вида

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0 \tag{51}$$

ни при каком выборе функции Φ. В самом деле, если бы такое соотношение существовало, то мы не смогли бы найти из системы (33) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Если интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ имеют непрерывные частные производные, то для независимости их необходимо и достаточно, чтобы якобиан функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не обращался тождественно в нуль:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{52}$$

Достаточность вытекает из следующей теоремы математического анализа.

Теорема. *Пусть даны m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant m)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти функции были независимы между собой, т. е. чтобы ни одна из них не приводилась к постоянной и чтобы они не удовлетворяли соотношению, не содержащему независимых переменных x, заключается в том, чтобы по крайней мере один из функциональных определите-*

лей, которые можно образовать из столбцов таблицы

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}, \ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}, \end{array}\right\} \qquad (53)$$

*не приводился тождественно к нулю**.

Необходимость. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ независимые интегралы системы (2), определенные в области D. Возьмем в области D точку $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, в которой хоть один из определителей n-го порядка, составленных из матрицы

$$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}, \ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}, \ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}, \ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{array} \right\| \qquad (54)$$

отличен от нуля. (Такая точка существует, согласно сформулированной выше теореме.) Покажем, что именно определитель, составленный из последних n столбцов матрицы (54), отличен от нуля в этой точке, т. е.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \ (x = x_0, \ y_1 = y_1^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)}). \quad (55)$$

Если $\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, то условие (52), очевидно, выполняется.

Предположим, что хоть одна из $\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x}$ отлична от нуля в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Так как $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ суть интегралы системы (2), то в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ имеют место равенства

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0, \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_n} f_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (56)$$

---

* См.: Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. II, 1933, стр. 314—315.

Отсюда следует, что **линейная неоднородная** система

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}u_1+\ldots+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}u_n=0,\\
&\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}u_1+\ldots+\frac{\partial\psi_2}{\partial y_n}u_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\psi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_1}u_1+\ldots+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}u_n=0
\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&(x=x_0,\ y_1=y_1^{(0)},\ \ldots\\&\ldots,\ y_n=y_n^{(0)})\end{aligned}\qquad (57)$$

совместна. Следовательно (согласно теореме об условии совместности неоднородной линейной системы), ранг матрицы системы (57) равен рангу расширенной матрицы, а так как ранг расширенной матрицы равен n, то и ранг матрицы системы (57) равен n, что и означает, что выполняется условие (52).

Всякие n первых интегралов мы будем называть *независимыми,* если соответствующие им интегралы независимы.

Из сказанного вытекает, что **задача построения общего интеграла системы будет решена, если мы найдем n независимых первых интегралов.**

Общего способа нахождения первых интегралов указать нельзя. Заметим лишь, что во многих случаях удается найти первый интеграл путем некоторых преобразований данной системы, в результате которых получается легко интегрируемое дифференциальное уравнение. Всякое такое уравнение будем называть *интегрируемой комбинацией.* Простейшей интегрируемой комбинацией является уравнение вида $\frac{d\psi}{dx}=0$ или $d\psi=0$, где ψ есть функция от $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. В этом случае, очевидно, первым интегралом будет $\psi=C$. Каждая интегрируемая комбинация порождает первый интеграл. Однако среди них могут оказаться и зависимые. Поэтому **всякий раз, получая новый первый интеграл, нужно проверять, будет ли он независимым с ранее найденными.**

При этом *если число интегралов есть $k(1<k<n)$, то они будут независимыми тогда и только тогда, когда хоть один из функциональных определителей k-го порядка, составленный из столбцов таблицы*

$$\left.\begin{matrix}
\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n},\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\psi_k}{\partial y_1}, & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_n},
\end{matrix}\right\}\qquad (58)$$

не равен тождественно нулю.

Это доказывается теми же рассуждениями, которые мы проводили выше для доказательства условия независимости n интегралов системы (2).

Пример 1. Рассмотрим снова систему (5),

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5y + 4z,\\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z.\end{aligned}\right\}$$

Общее решение ее дается равенствами (6),

$$\left.\begin{aligned}y &= C_1e^x + C_2e^{9x},\\ z &= -C_1e^x + C_2e^{9x}.\end{aligned}\right\}$$

(Почему?). Разрешая систему (6) относительно C_1 и C_2, получаем:

$$\frac{1}{2}\,(y-z)\,e^{-x} = C_1,\quad \frac{1}{2}\,(y+z)\,e^{-9x} = C_2. \tag{59}$$

Это есть *общий интеграл* системы (5). Каждое из равенств (59) является **первым интегралом** системы (5), а функции, стоящие в левых частях этих равенств, суть *интегралы* этой системы. Очевидно, что функции

$$\psi_1 = (y-z)\,e^{-x},\quad \psi_2 = (y+z)\,e^{-9x} \tag{60}$$

тоже будут *интегралами* системы (5). Убедимся в этом непосредственно на основании второго определения интеграла. Находя полные дифференциалы функций ψ_1 и ψ_2, получим:

$$d\psi_1 = [dy - dz + (z-y)\,dx]\,e^{-x},\quad d\psi_2 = [dy + dz - 9\,(y+z)\,dx]\,e^{-9x}. \tag{61}$$

Подставляя сюда вместо dy и dz их значения из рассматриваемой системы (5), имеем:

$$\left.\begin{aligned}d\psi_1 &= [5y + 4z - (4y + 5z) + z - y]\,e^{-x}\,dx \equiv 0,\\ d\psi_2 &= [5y + 4z + 4y + 5z - 9\,(y+z)]\,e^{-9x}\,dx \equiv 0.\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Следовательно, ψ_1 и ψ_2, суть интегралы системы (5).

Эти интегралы можно получить и *непосредственно* путем преобразований системы (5). Действительно, вычитая в (5) второе уравнение из первого, имеем интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d\,(y-z)}{dx} = y - z, \tag{63}$$

откуда:

$$y - z = C_1e^x, \tag{64}$$

или

$$(y-z)\,e^{-x} = C_1. \tag{65}$$

Следовательно,

$$\psi_1 = (y-z)\,e^{-x} \tag{66}$$

есть *интеграл* системы (5). Складывая в (5) первое уравнение со вторым, аналогично получаем, что

$$\psi_2 = (y+z)\,e^{-9x} \tag{67}$$

есть интеграл системы (5). Интегралы ψ_1 и ψ_2, очевидно, независимы. В этом можно убедиться и при помощи вычисления их якобиана, ибо последний, будучи равным $2e^{-10x}$, не обращается в нуль.

Пример 2. Возьмем систему более общего вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p(x)\, y + q(x)\, z, \\ \frac{dz}{dx} &= q(x)\, y + p(x)\, z. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Для этой системы тем же приемом, что и в предыдущем примере, легко находятся два первых интеграла. Складывая почленно первое уравнение системы (68) со вторым, имеем:

$$\frac{d(y+z)}{dx} = [p(x) + q(x)]\,(y+z), \tag{69}$$

откуда

$$y + z = C_1 e^{\int [p(x)+q(x)]\,dx}. \tag{70}$$

Вычитая почленно второе уравнение системы (68) из первого, имеем:

$$\frac{d(y-z)}{dx} = [p(x) - q(x)]\,(y-z), \tag{71}$$

откуда

$$y - z = C_2 e^{\int [p(x)-q(x)]\,dx}. \tag{72}$$

Разрешая систему уравнений (70), (72) относительно C_1 и C_2, получим два независимых первых интеграла системы (68), т. е. общий интеграл. Разрешая ту же систему относительно y и z, найдем общее решение системы (68).

Например, указанным приемом легко интегрируется следующая с виду сложная система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\cos\ln x)\, y + (\sin\ln x)\, z, \\ \frac{dz}{dx} &= (\sin\ln x)\, y + (\cos\ln x)\, z. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Общим решением этой системы будет:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{x\sin\ln x} + C_2 e^{x\cos\ln x}, \\ z &= C_1 e^{x\sin\ln x} - C_2 e^{x\cos\ln x}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Пример 3. Найти общий интеграл системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_3 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_2 - y_1. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Сложим все уравнения. Получаем:

$$\frac{d(y_1+y_2+y_3)}{dx}=0, \tag{76}$$

т. е.

$$\psi_1 \equiv y_1+y_2+y_3=C_1 \tag{77}$$

является **первым интегралом** системы (75).

Далее, умножив уравнения (75) соответственно на y_1, y_2, y_3 и складывая, будем иметь:

$$\frac{d(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}{dx}=0. \tag{78}$$

Следовательно,

$$\psi_2 \equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2=C_2 \tag{79}$$

тоже есть **первый интеграл** системы (75). Очевидно, что ψ_1 и ψ_2 — **независимые** интегралы (ибо ψ_1 не может быть представлена никакой функцией от ψ_2).

Мы могли бы дальше поступить следующим образом. Умножим первое из уравнений (75) на y_2, второе — на y_1 и сложим. Получаем:

$$\frac{d(y_1y_2)}{dx}=y_2y_3-y_2^2+y_1^2-y_1y_3. \tag{80}$$

Умножим первое из уравнений (75) на y_3, третье — на y_1 и сложим. Тогда:

$$\frac{d(y_1y_3)}{dx}=y_3^2-y_2y_3+y_1y_2-y_1^2. \tag{81}$$

Умножим второе из уравнений (75) на y_3, третье — на y_2 и сложим. Получаем:

$$\frac{d(y_2y_3)}{dx}=y_1y_3-y_3^2+y_2^2-y_1y_2. \tag{82}$$

Сложив уравнения (80)—(82), будем иметь:

$$\frac{d(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)}{dx}=0. \tag{83}$$

Следовательно,

$$\psi \equiv y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=C \tag{84}$$

также является **первым интегралом** системы (75).

Но мы имеем

$$\frac{D(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3)}=0 \quad \text{(почему?)}. \tag{85}$$

Поэтому **интегралы** ψ_1, ψ_2, ψ, а вместе с ними и первые интегралы $\psi_1=C_1$, $\psi_2=C_2$, $\psi=C$ **не будут независимыми**. Непосредственной проверкой легко убедиться, что между интегралами ψ_1, ψ_2 и ψ существует следующая функциональная зависимость:

$$\varphi=\frac{1}{2}(\psi_1^2-\psi_2). \tag{86}$$

Для нахождения недостающего первого интеграла воспользуемся найденными первыми интегралами $\psi_1 = C_1$ и $\psi_2 = C_2$. Составим систему:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &\equiv y_1 + y_2 + y_3 = C_1, \\ \psi_2 &\equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Разрешим эту систему относительно y_1 и y_2. Получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(C_1 - y_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}\right), \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left(C_1 - y_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Подставляя найденные выражения для y_1 и y_2 в последнее из уравнений системы (75), будем иметь:

$$\frac{dy_3}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}. \tag{89}$$

Получили одно уравнение одной неизвестной функцией. Интегрируя его, находим:

$$\arcsin \frac{3y_3 - C_1}{\sqrt{6C_2 - 2C_1^2}} - \sqrt{3}\,x = C_3. \tag{90}$$

Заменяя здесь C_1 и C_2 их значениями из системы (87), получаем **первый интеграл**:

$$\psi_3 \equiv \arcsin \frac{2y_3 - y_1 - y_2}{2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3}} - \sqrt{3}\,x = C_3. \tag{91}$$

Равенства (87) и (91) и составляют **общий интеграл** системы (75).

Докажем две общие теоремы о числе интегралов нормальной системы, причем будем предполагать, что интегралы, о которых идет речь, имеют непрерывные частные производные по x, $y_1, \ldots, y_n$.

Теорема 1. *Нормальная система n уравнений не может допускать более n независимых интегралов.*

Утверждение теоремы равносильно тому, что если известны $(n+1)$ интегралов системы (2):

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi, \tag{92}$$

то они не могут быть независимы. Рассмотрим два случая:

а) интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ зависимы. В этом случае теорема, очевидно, доказана;

б) интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ независимы. Тогда они удовлетворяют условию (52),

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Так как функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ и ψ суть интегралы системы (2), то мы имеем тождества:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0, \\ &\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Эти тождества показывают, что линейная однородная система:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} u_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} u_{n+1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial \psi_n}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} u_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} u_{n+1} = 0, \\ &\frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} u_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} u_{n+1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

имеет ненулевое решение $u_1 = 1,\ u_2 = f_1,\ \ldots,\ u_{n+1} = f_n$. Поэтому определитель системы (94) равен нулю, т. е.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi)}{D(y_1, y, \ldots, y_n, x)} = 0. \tag{94}$$

Отсюда, вследствие условия (52), на основании известной теоремы дифференциального исчисления*, вытекаст, что ψ является функцией от $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$:

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \tag{96}$$

в некоторой окрестности точки $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, в которой

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \quad (x = x_0,\ y_1 = y_1^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}), \tag{97}$$

т. е. функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ и ψ оказываются зависимыми. При этом функция Φ имеет непрерывные частные производные по $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, которые не обращаются одновременно в нуль**.

Теорема 2. *Если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ независимые интегралы системы (2), определенные в области D, а $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ любая функция, определенная в некоторой области изменения $z_1, z_2, \ldots, z_k$, охватывающей все значения, принимаемые соответственно функциями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ (когда точка $(x, y_1, \ldots, y_n)$ пробегает всю область D), и имеющая в этой области непрерывные частные производные по $z_1, z_2, \ldots, z_k$,* не

---

* См. вторую сноску на стр. 46.

** Ср. аналогичное утверждение для случая $n = 1$ (п. 17).

равные нулю одновременно, то функция

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k) \tag{98}$$

тоже будет интегралом системы (2).

В самом деле, функция ψ имеет непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_n} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Покажем, что в некоторой области частные производные от функции ψ по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не обращаются одновременно в нуль.

Не умаляя общности, мы можем предположить, что якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \tag{100}$$

не равен тождественно нулю в области D. Тогда в области D существует такая точка $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, что в ней и в некоторой окрестности ее якобиан (100) отличен от нуля. В этой окрестности $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не обращаются одновременно в нуль.

Остается показать, что полный дифференциал функции ψ тождественно (в D) равен нулю в силу системы (2). Мы имеем

$$d\psi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i}\, d\psi_i. \tag{101}$$

Так как $d\psi_1 \equiv 0, \ldots, d\psi_k \equiv 0$ в силу системы (2), то и $d\psi \equiv 0$ в силу этой системы.

Следовательно, функция (98) есть интеграл системы (2).

На основании доказанных здесь теорем мы можем утверждать, что *если система* (2) *допускает n независимых интегралов* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, *то формула* (96) *содержит в себе при произвольной функции* Φ (*обладающей указанными свойствами*) *все интегралы системы* (2) и, *следовательно, представляет собою самый общий вид интеграла этой системы.*

В п. 138 доказывается, что при некоторых условиях, наложенных на правые части системы (2), последняя всегда имеет n независимых интегралов. Тем самым доказывается, что формула (96) действительно представляет собой самый общий вид интеграла системы (2)*.

111. Понижение порядка системы при помощи первых интегралов. Чем ниже порядок системы, тем интегрирование ее теоретически проще.

Покажем, что *знание одного первого интеграла дает возможность понизить порядок системы на единицу.*

Пусть известен один первый интеграл

$$\varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1. \tag{102}$$

Предположим, что уравнение (102) разрешимо относительно одной из искомых функций, например, относительно y_1, так что мы имеем:

$$y_1 = \overline{\varphi}_1(x, y_2, \ldots, y_n, C_1). \tag{103}$$

Подставив это значение y_1 в последние $n-1$ уравнения системы (2), мы получим систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, \overline{\varphi}_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, \overline{\varphi}_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, \overline{\varphi}_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Предположим, что нам удалось найти общее решение полученной системы:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Тогда, заменяя в (103) величины $y_2, \ldots, y_n$ их выражениями согласно формулам (105), будем иметь:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{106}$$

Нетрудно видеть, что формулы (106) и (105) дают общее решение системы (2).

Покажем теперь, что *знание k независимых первых интегралов системы дает возможность понизить порядок ее на k единиц.*

---

* Напоминаем, что речь идет об интегралах в смысле 2-го определения, определенных в некоторой окрестности точки $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, в которой выполнены условия существования и единственности решения.

Пусть нам известно k независимых первых интегралов:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_k(x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) = C_k. \end{array}\right\} \quad (107)$$

Тогда хоть один из якобианов k-го порядка, составленных из столбцов таблицы

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, \ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1}, \ \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_k}{\partial y_n}, \end{array}\right\} \quad (108)$$

не равен тождественно нулю. Предположим, например, что

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \neq 0. \quad (109)$$

Разрешая (107) относительно $y_1, \ldots, y_k$, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \overline{\varphi_1}(x, y_{k+1}, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = \overline{\varphi_k}(x, y_{k+1}, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_k). \end{array}\right\} \quad (110)$$

Подставив эти значения $y_1, \ldots, y_k$ в последнее $(n-k)$ уравнений системы (2), мы получим систему $(n-k)$ уравнений с $(n-k)$ неизвестными функциями $y_{k+1}, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_{k+1}}{dx} = f_{k+1}(x, \overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_k}, y_{k+1}, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, \overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_k}, y_{k+1}, \ldots, y_n). \end{array}\right\} \quad (111)$$

Предположим, что нам удалось найти общее решение этой системы

$$\left.\begin{array}{l} y_{k+1} = \varphi_{k+1}(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n). \end{array}\right\} \quad (112)$$

Тогда, заменяя в (110) величины $y_{k+1}, \ldots, y_n$ их значениями согласно формулам (112) будем иметь формулы:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = \varphi_k(x, C_1, \ldots, C_n), \end{array}\right\} \quad (113)$$

которые вместе с формулами (112) и дают* **общее решение** системы (2).

Если известны $(n-1)$ *независимых первых интегралов системы* (2), *то задача интегрирования ее приводится к интегрированию только одного уравнения с одной неизвестной функцией***.

Наконец, **если мы имеем** n **независимых первых интегралов**, то, как сказано выше, мы тем самым уже имеем **общий интеграл** и задача решена.

112. Приведение уравнения n-го порядка к системе n уравнений первого порядка и обратная задача. Пусть дано уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{114}$$

Обозначим искомую функцию y через y_1***, $y_1 = y$ и введем в рассмотрение новые функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ определив их при помощи соотношений

$$y_2 = y', \; y_3 = y'', \; \ldots, \; y_n = y^{(n-1)}. \tag{115}$$

В силу этого выбора новых функций и данного уравнения будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y' = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y'' = y_3, \; \ldots, \; \frac{dy_{n-1}}{dx} = y^{(n-1)} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = f\left(x, y_1 \, y_2, \ldots, y_n\right), \end{aligned}\right\}$$

так что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют следующей **системе дифференциальных уравнений**:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Система (116) называется *нормальной системой дифференциальных уравнений, равносильной уравнению* (114). Можно построить и другие нормальные системы, эквивалентные уравнению (114), если ввести новые неизвестные функции при помощи соотношений, отличных от (115).

---

* См.: В. А. Стеклов. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 1927, стр. 55.

** См. п. **110**, пример 3.

*** Исключительно в целях симметрии обозначений. На практике в этом нет необходимости.

Легко видеть, что если мы нашли решение $y_1, y_2, \ldots, y_n$ системы (116), то тем самым нашли решение $y=y_1$ уравнения (114) и, наоборот, если имеем решение y уравнения (114), то тем самым имеем решение $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$ системы (116).

Такое же соответствие мы имеем и для задач Коши. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ есть решение системы (116), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

то $y = y_1$ будет решением уравнения (114), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y = y_1^{(0)} \equiv y_0,\ y' = y_2^{(0)} \equiv y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_n^{(0)} \equiv y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \tag{118}$$

и, наоборот, если y есть решение уравнения (114), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{119}$$

то $y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}$ будет решением системы (116) удовлетворяющим начальным условиям:

$$y_1 = y_0 \equiv y_1^{(0)},\ y_2 = y_0' \equiv y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_0^{(n-1)} \equiv y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{120}$$

Если мы нашли общее решение системы (116) в области $D(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то тем самым мы нашли общее решение уравнения (114) в области $D(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и, наоборот, так что *задача интегрирования уравнения* (114) *равносильна задаче интегрирования системы* (116)*.

Приведение одного уравнения любого порядка, разрешенного относительно старшей производной, к равносильной нормальной системе уравнений в некоторых случаях упрощает задачу нахождения общего решения или решения задачи Коши, а главное, избавляет нас от необходимости проводить доказательство некоторых общих теорем о существовании и свойствах решений раздельно для уравнений высшего порядка и для систем уравнений первого порядка и дает возможность сводить исследование поведения решений уравнения n-го порядка к изучению того же вопроса для равносильной ему нормальной системы, причем фазовым пространством** будет пространство переменных $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Именно поэтому в качественной теории дифференциальных уравнений исследуют, главным образом, нормальные системы дифференциальных уравнений.

---

* Именно поэтому система (116) и называется равносильной уравнению (114).

** См. п. **104**.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \tag{121}$$

где t — время, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Введем наряду с искомой функцией x новую функцию x_1, положив $x_1 = \dot{x}$. Тогда уравнение (121) приведется к системе:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= f(t, x, x_1). \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Если мы изучим поведение решений полученной системы на фазовой плоскости (x, x_1), то тем самым мы изучим поведение решений уравнения (121). При этом исследование системы оказывается более удобным, чем непосредственное исследование уравнения (121)*.

Рассмотрим теперь вопрос о приведении нормальной системы к одному уравнению. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

где f_i — дифференцируемые $n - 1$ раз функции.

Продифференцируем первое уравнение $n - 1$ раз по x, считая y_i функциями от x и заменяя после каждого дифференцирования производные $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ их значениями из системы (123). Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1''' &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} f_1 + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} &= \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_n} y_n' = \\ &= \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_n} f_n = \\ &\qquad = \Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1^{(n)} &= \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n} y_n' = \\ &= \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n} f_n = \\ &\qquad = \Phi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

---

* См. п. 142.

Предположим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{125}$$

Тогда система уравнений, составленная из первого уравнения системы (123) и первых $(n-2)$-х уравнений системы (124), будет разрешима относительно $y_2, \dots, y_n$. При этом $y_2, \dots, y_n$ выразятся через $x, y, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Заменяя в последнем уравнении системы (124) функции $y_2, \dots, y_n$ найденными их выражениями, получим **уравнение n-го порядка**

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \tag{126}$$

Если мы имеем решение $y_1, y_2, \dots, y_n$ *системы* (123), *то первая функция* y_1 *и будет решением уравнения* (126).

Покажем, что (при сделанном предположении), и наоборот, *решение* y_1 *уравнения* (126) *и функции* $y_2, \dots, y_n$, *найденные из первого уравнения* (123) *и первых* $(n-2)$*-х уравнений системы* (124)*, *составляют решение системы* (123).

В самом деле функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ удовлетворяют первому уравнению системы (123), так что мы имеем тождество $y_1' \equiv f_1$. Вычитая в системе (124) третьи части из вторых и принимая во внимание, что $y_1' \equiv f_1$, мы получим систему равенств:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_n' - f_n) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2}(y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n}(y_n' - f_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_2}(y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n}(y_n' - f_n) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

которые мы можем рассматривать как линейную однородную систему уравнений с неизвестными $y_2' - f_2, \dots, y_n' - f_n$. Так как определитель этой системы в силу условия (125) отличен от нуля, то все неизвестные равны нулю, т. е. $y_2' - f_2 \equiv 0, \dots, y_n' - f_n \equiv 0$, так что $y_2' \equiv f_2, \dots, y_n' \equiv f_n$. Присоединяя сюда установленное выше тождество $y_1' \equiv f_1$ заключаем, что функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ действительно удовлетворяют системе (123).

---

* При этом $y_2, \dots, y_n$ являются известными функциями от x. В самом деле, они выражаются через $x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}$, но y_1, а следовательно, и $y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$ суть известные функции от x.

Уравнение (126) мы будем называть *уравнением n-го порядка, равносильным системе* (123) в том смысле, что задача интегрирования системы (123) равносильна задаче интегрирования уравнения (126).

Приведение системы к одному уравнению иногда значительно упрощает ее интегрирование, а также изучение свойств решений.

Может случиться, что функции $y_2, \ldots, y_n$ нельзя найти через $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Тогда мы не получим уравнения n-го порядка. Например, может оказаться, что уже из первого уравнения данной системы (123) и первого уравнения системы (124) можно исключить $y_2, \ldots, y_n$*, так что мы получим для y_1 уравнение второго порядка. Если найдем общее решение этого уравнения $y_1 = \varphi(x, C_1, C_2)$, то данная система (123) приведется к системе $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными, ибо одна из функций $y_2, \ldots, y_n$ выразится через x, y_1, y'_1 и остальные функции. К полученной системе можно применить те же преобразования, в результате чего она либо приведется к одному уравнению $(n-2)$-го порядка, либо выделится еще уравнение с одной неизвестной функцией.

В общем случае система (123) приведется к группе уравнений, каждое из которых имеет порядок s, где $1 \leqslant s \leqslant n$, причем сумма этих порядков всегда равна n. При интегрировании полученной группы уравнений мы можем иногда ввести больше чем n произвольных постоянных. Тогда эти произвольные постоянные зависимы друг от друга и нужно найти их связь между собою, для чего достаточно подставить полученное общее решение в уравнения заданной системы.

Пример. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{123'}$$

Эта система (путем дифференцирования первого уравнения и использования второго) приводится к одному уравнению 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{126'}$$

Его общим решением будет**

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Поэтому

$$y = \frac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Общим решением системы (123') будет

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned}\right\}$$

---

* См. п. 218, пример.

** См. п. 176, пример 4.

113. Один общий способ интегрирования нормальной системы двух уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Коши — Римана*. Излагаемый ниже метод интегрирования в конечном виде одного класса систем дифференциальных уравнений основан на использовании функций комплексной переменной**.

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

где x и y — искомые вещественные функции от вещественной независимой переменной t. Предположим, что правые части этой системы имеют непрерывные частные производные и удовлетворяют *условиям Коши — Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Введем в рассмотрение комплексную переменную z, положив

$$z = x + iy,$$

и определим производную от z по t равенством***

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Тогда, умножая второе из уравнений системы (128) на i и складывая с первым, получаем:

$$\frac{dz}{dt} = u(x, y) + iv(x, y) \equiv f(z)$$

или

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \qquad (129)$$

где $f(z)$ — регулярная функция от комплексной переменной z. Из уравнения (129) имеем

$$\frac{dz}{f(z)} = dt \quad [f(z) = 0?],$$

откуда

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} = t + C, \qquad (130)$$

---

* Н. П. Еругин. Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде. Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 3, 1950.

** Все необходимые сведения из теории функций комплексной переменной читатель найдет в книгах: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. I, 1949, гл. VI, § 1, п. 163—169, 172; т. III, ч. 2, гл. I, § 1—7. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, 1948, гл. XII, § 5.

*** Здесь z рассматривается как комплексная функция от вещественной переменной t. Подробнее о таких функциях см. п. 159.

где $C = C_1 + iC_2$ — произвольное постоянное комплексное число, C_1 и C_2 — вещественные произвольные постоянные числа. При этом мы считаем, что путь интегрирования не проходит через точки, в которых $f(z) = 0$. На плоскости (x, y) этим исключительным точкам соответствуют точки равновесия (покоя) системы (128)*.

Отделяя в равенстве (130) вещественную и мнимую части, получим выражение для x и y как функций от t и произвольных постоянных C_1 и C_2.

Заметим, что если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ суть полиномы, то и $f(z)$ будет полиномом. В этом случае интеграл в (130) выражается через элементарные функции.

Пример. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= mx + ny, \\ \frac{dy}{dt} &= -nx + my. \end{aligned}\right\}$$

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = m, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = n, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -n,$$

так что условия Коши — Римана выполнены. Следуя изложенному методу, получим:

$$\frac{dz}{dt} = bz \quad (b = m - in),$$

откуда

$$z = Ce^{bt} \quad (C = C_1 + iC_2).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим общее решение рассматриваемой системы в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{mt} \, (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt), \\ y &= e^{mt} \, (C_2 \cos nt - C_1 \sin nt). \end{aligned}\right\}$$

Изложенный метод интегрирования нормальной системы двух уравнений, удовлетворяющих условиям Коши — Римана, можно распространить на нормальную систему любого порядка**.

Этот метод применяется как в самой теории дифференциальных уравнений, так и в ее приложениях***.

114. Понятие о системе уравнений высших порядков. *Систе-*

---

* См. п. **140**.

** См.: В. Е. Сливинский. Об одном применении обобщенной теории функций комплексного переменного. ДАН СССР, т. 74, № 5, 1950.

*** См. например: Gregor Jiri. Dynamické systémy s regulârni pravou stranou. I. Pokroky mat., fys. a astron., 1958, 3, № 2. Б. А. Ковалев. Об одном достаточном условии существования центра. «Научн. зап. Одесск. политехн. ин-та», 46, 1962, 47—50.

ма уравнений высших порядков имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n)}),\\
&F_2(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_n(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n)}).
\end{aligned}\right\}$$

Предположим, что эта система разрешима относительно старших производных:

$$\left.\begin{aligned}
y_1^{(m_1)} &= f_1(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)}),\\
y_2^{(m_2)} &= f_2(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n^{(m_n)} &= f_n(x_1 y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)}).
\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Система вида (131), т. е. система уравнений, разрешенная относительно старших производных, называется *канонической* системой.

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением только канонических систем.

Каноническая система вида (131) сводится к нормальной системе* уравнений, если обозначить все производные, стоящие справа, через новые неизвестные функции (так же, как в случае одного уравнения n-го порядка). Получим $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений первого порядка.

Вообще говоря, система (131) приводится и к одному уравнению порядка $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ с одной неизвестной функцией.

Общее решение системы (131) содержит $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ произвольных постоянных.

Задача Коши для системы (131) формулируется так: среди всех решений системы (131) найти такое решение $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которое вместе со своими производными до порядков соответственно $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1$ принимает наперед заданные числовые значения при заданном значении x, так что при $x = x_0$ мы имеем:

---

* Система общего вида также при некоторых ограничениях весьма общего характера приводится к нормальной системе уравнений (см.: В. А. Стеклов. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 1927, стр. 19—38).

$$
\left.\begin{array}{l}
y_1 = y_{10},\ y_1' = y_{10}',\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)} = y_{10}^{(m_1-1)},\\
y_2 = y_{20},\ y_2' = y_{20}',\ \ldots,\ y_2^{(m_2-1)} = y_{20}^{(m_2-1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n = y_{n0},\ y_n' = y_{n0}',\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)} = y_{n0}^{(m_n-1)},
\end{array}\right\} \quad (132)
$$

где правые части суть наперед заданные числа.

Пример. Дана система:

$$
\left.\begin{array}{l}
y_1'' + k^2 y_2 = 0,\\
y_2'' + k^2 y_1 = 0.
\end{array}\right\} \quad (133)
$$

Найти нормальную систему и одно уравнение четвертого порядка, равносильные этой системе.

Положим $y_3 = y_1'$, $y_4 = y_2'$. Получаем:

$$
y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad y_3' = -k^2 y_2, \quad y_4' = -k^2 y_1.
$$

Полученная нормальная система равносильна данной системе уравнений.

Дифференцируем первое уравнение системы (133) два раза. Тогда, принимая во внимание второе уравнение, получим уравнение четвертого порядка:

$$
y_1^{(4)} - k^4 y_1 = 0, \quad (134)
$$

равносильное системе (133). Проинтегрировав уравнение (134), найдем y_2 по формуле $y_2 = -\frac{1}{k^2} y_1''$.

Система (133) проинтегрирована этим методом в п. **220**.

115. Построение всего множества нормальных систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную траекторию*. Пусть на фазовой плоскости (x, y) задана кривая

$$
W(x, y) = 0 \quad (135)
$$

и требуется найти все такие системы дифференциальных уравнений

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{dx}{dt} = Q(x, y),\\
\frac{dy}{dt} = P(x, y),
\end{array}\right\} \quad (136)
$$

для которых кривая (135) является траекторией. Задача состоит в том, чтобы по заданной функции W найти соответствующие функции P и Q, указав их общий вид. Подобные задачи часто возникают в приложениях**.

---

* См.: Н. П. Еругин. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, ПММ., т. XVI, вып. 6, 1952.

** См., например: П. П. Касьянков. О некоторых задачах теории фокусировки электронных лучей. ДАН СССР, т. 108, № 5, 1956.

Для решения поставленной задачи установим сначала одно соотношение, связывающее функцию W с функциями P и Q, которое должно всегда выполняться на траектории $W = 0$.

Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{137}$$

есть некоторое движение, определяемое системой (136). Тогда имеем тождества

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\equiv Q[x(t), \quad y(t)], \\ \frac{dy(t)}{dt} &\equiv P[x(t), \quad y(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Уравнения (137) суть параметрические уравнения некоторой траектории, определяемой системой (136). Предположим, что исключив параметр t, мы получим уравнение траектории в обычной форме и что последнее имеет вид (135), где функция W непрерывно дифференцируема.

Заменив в полученном уравнении (135) переменные x и y их значениями из (137), будем иметь тождество

$$W[x(t), \quad y(t)] \equiv 0. \tag{139}$$

Дифференцируя это тождество по t, получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} \equiv 0, \tag{140}$$

откуда, в силу (138), будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q[x(t), y(t)] + \frac{\partial W}{\partial y} P[x(t), y(t)] \equiv 0. \tag{141}$$

Таким образом, если $W(x, y) = 0$ есть траектория, определяемая системой (136), то вдоль этой траектории должно выполняться равенство

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) = 0. \tag{142}$$

Если это равенство выполняется тождественно, то всякая кривая из семейства

$$W(x, y) = C, \tag{143}$$

где C — произвольная постоянная, будет траекторией для системы дифференциальных уравнений (136).

Пусть, например, дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) = Q, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2 - 1) \equiv P. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Возьмем

$$W = x^2 + y^2 - 1.$$

Проверим, будет ли кривая

$$W = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{145}$$

траекторией системы (144). Составим для системы (144) равенство (142). Получим

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Это равенство выполняется на кривой (145). Поэтому последняя является траекторией системы (144). Но кривая

$$x^2 + y^2 - 1 = C \quad (C \neq 0)$$

не является траекторией системы (144).

Переходя к решению поставленной задачи, докажем, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) = F(W, x, y), \tag{146}$$

где

$$F(0, \xi, \eta) = 0. \tag{147}$$

В самом деле, обозначим левую часть равенства (146) через $\omega(x, y)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) = \omega(x, y).$$

Найдя затем y из уравнения $W(x, y) = W$:

$$y = \varphi(W, x)$$

и подставив это значение y в функцию $\omega(x, y)$, мы получим:

$$\omega(x, y) = \omega[x, \varphi(W, x)].$$

Аналогично, разрешая уравнение $W(x, y) = W$ относительно x, мы можем представить функцию $\omega(x, y)$ в виде

$$\omega(x, y) = \omega[\psi(W, y), y],$$

так что мы можем написать:

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2}\left\{\omega[x, \varphi(W, x)] + \omega[\psi(W, y), y]\right\} = F(W, x, y),$$

что и доказывает справедливость равенства (146).

Считая $F(W, x, y)$ заданной функцией, мы можем рассматривать равенство (146) как одно уравнение с двумя неизвестными P и Q.

Возьмем функцию Q в виде

$$Q(x, y) = F_1(W, x, y) - \frac{\partial W}{\partial y} M(x, y), \tag{148'}$$

где

$$F_1(0,\ \xi,\ \eta) = 0,$$

а $M(x,\ y)$ — некоторая функция от x и y. Тогда из (146) найдем для функции P выражение

$$P(x,\ y) = F_2(W,\ x,\ y) + \frac{\partial W}{\partial x} M(x,\ y), \tag{149''}$$

где

$$F_2(0,\ \xi,\ \eta) = 0.$$

Таким образом, общий вид систем, для которых кривая (135) является траекторией, можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(W,\ x,\ y) - \frac{\partial W}{\partial y} M(x,\ y), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(W,\ x,\ y) + \frac{\partial W}{\partial x} M(x,\ y), \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

где F_1 и F_2 удовлетворяют условию:

$$F_1(0,\ \xi,\ \eta) = 0, \quad F_2(0,\ \xi,\ \eta) = 0.$$

§ 2. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

116. Понятие о системе обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме. Приведение нормальной системы к системе в симметрической форме. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}. \tag{1}$$

В эту систему все переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ входят равноправно, в то время как в нормальной системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

этого равноправия нет: $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ рассматриваются как искомые функции, а x — как независимая переменная. Систему (1) мы будем называть *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме.*

Нормальную систему (2) всегда можно привести к системе в симметрической форме. С этой целью перепишем систему (2) в виде:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots =$$
$$= \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \tag{3}$$

Систему (3) будем называть *системой дифференциальных уравнений первого порядка в симметрической форме, соответствующей нормальной системе* (2). В систему (3) все переменные $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ входят уже равноправно.

Иногда (например, когда все функции f_i представляют собою дроби с одним и тем же знаменателем) целесообразно умножить все знаменатели $1, f_1, f_2, \ldots, f_n$ на один и тот же множитель $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда получим систему:

$$\frac{dx}{\varphi} = \frac{dy_1}{f_1\varphi} = \frac{dy_2}{f_2\varphi} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n\varphi}. \tag{4}$$

Введем симметричные обозначения для всех переменных x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$, полагая

$$x \equiv x_1, \quad y_1 \equiv x_2, \quad y_2 \equiv x_3, \ \ldots, \ y_n = x_{n+1}, \tag{5}$$

и симметричные обозначения для всех знаменателей, полагая

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\equiv X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\ f_1\varphi &\equiv X_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n\varphi &\equiv X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда система (4) приведется к виду

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \ldots =$$
$$= \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}. \tag{7}$$

Пример 1. Система

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} \tag{8}$$

есть система $n-1$ дифференциальных уравнений в симметрической форме.

Пример 2. Привести нормальную систему двух уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x} \tag{9}$$

к симметрической форме.

Следуя указанному выше способу, имеем:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\frac{z}{x}}=\frac{dz}{\frac{y}{x}}. \tag{10}$$

Умножив все знаменатели на x, получим:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}. \tag{11}$$

Это и есть искомая система. Если ввести симметричные обозначения:

$$x\equiv x_1,\quad y\equiv x_2,\quad z\equiv x_3,$$

то система (11) перепишется в виде:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_3}=\frac{dx_3}{x_2}. \tag{12}$$

117. Интегралы, первые интегралы и общий интеграл системы дифференциальных уравнений в симметрической форме. Рассмотрим систему (1),

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Предположим, что функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определены и непрерывны вместе с первыми частными производными по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ причем ни в одной точке этой области они не обращаются одновременно в нуль. Пусть $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — некоторая точка указанной области. Не умаляя общности, будем считать, что

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\neq 0. \tag{13}$$

При сделанных предположениях систему (1), принимая x_n за независимую переменную, можно переписать в виде следующей нормальной системы $n-1$ уравнений:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},\ \ldots,\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{14}$$

Решение, интеграл, общее решение и общий интеграл системы (14) будем называть соответственно *решением, интегралом, общим решением и общим интегралом* системы (1).

Система (14), а следовательно, и система (1) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов*:

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,$$
$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{15}$$

---

* Здесь и ниже речь идет об интегралах, определенных в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Из теорем, доказанных в п. **111** следует, что формула

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{16}$$

где Φ — любая функция, имеющая непрерывные частные производные по $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, не обращающиеся одновременно в нуль, содержит все интегралы системы (14) или, что то же, системы (1).

Общий интеграл системы (14), а следовательно, и системы (1) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ &\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Разрешая (17) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, получим общее решение системы (14) или, что то же, системы (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ &x_2 = \varphi_2(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Используя сказанное о числе интегралов системы дифференциальных уравнений в симметрической форме, выясним вопрос о числе независимых интегралов автономной системы, не зависящих явно от аргумента. Рассмотрим автономную систему вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где роль независимой переменной играет время t. Покажем, что *эта система может допускать не более чем $n-1$ независимых интегралов, не содержащих явно время t.*

С этой целью перепишем систему (19) в симметрической форме:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{20}$$

Интегралы системы (19), не содержащие явно t, будут, очевидно, интегралами системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{21}$$

Но последняя имеет не более чем $n-1$ независимых интегралов, поэтому автономная система (19) может допускать не более чем $n-1$ интегралов, не содержащих явно независимую переменную, в нашем случае — время t.

Так, в примере 3 п. 110 мы нашли для автономной системы трех уравнений два независимых интеграла: $\psi_1 = y_1 + y_2 + y_3$ и $\psi_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, не содержащих явно независимую переменную x. Интеграл $\psi = y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$, согласно только что доказанному, необходимо должен был оказаться зависимым с интегралами ψ_1 и ψ_2. Третий независимый интеграл ψ_3 должен содержать независимую переменную x. Именно в таком виде он нами и найден.

Мы видели, что *общее решение системы* (1) *может быть найдено, если свести ее к нормальной системе* $n-1$ *уравнений* (14). Покажем еще, что *общее решение системы* (1) *может быть найдено путем рассмотрения некоторой нормальной системы* n *уравнений.*

С этой целью введем переменную t, приравняв в системе (1) равные отношения дифференциалу t:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt^*. \tag{22}$$

Отсюда мы имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = X_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \end{array}\right\} \tag{23}$$

Предположим, что для этой системы мы нашли $n-1$ независимых первых интегралов, не содержащих явно t:

$$\left.\begin{array}{r} \psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = C_{n-1}. \end{array}\right\} \tag{24}$$

Разрешая (24), например, относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, получим:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \bar{\varphi}_1(x_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}), \\ x_2 = \bar{\varphi}_2(x_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \bar{\varphi}_{n-1}(x_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}). \end{array}\right\} \tag{25}$$

---

* Иногда вместо dt берут $\varphi(t)\,dt$.

Подставим эти значения $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в последнее из уравнений системы (23). Тогда будем иметь:

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \tag{26}$$

Это уравнение легко интегрируется. Имеем:

$$\int \frac{dx_n}{f(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = t + C_n. \tag{27}$$

Отсюда

$$x_n = \varphi_n(t + C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \tag{28}$$

Подставляя найденное выражение для x_n в формулы (25), получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t + C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 &= \varphi_2(t + C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(t + C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Формулы (29) и (28) дают **общее решение** системы (1) в **параметрической форме**. При этом мы имеем $n-1$ **произвольных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Постоянная C_n указывает только на начало отсчета параметра t. Исключив параметр t, получим общее решение системы (1) в обычном виде, а именно в виде (25). Оно будет содержать $n-1$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$*, как и следовало ожидать, ибо (1) есть система $n-1$ уравнений.

Иногда **запись нормальной системы** (2) в **симметрической форме** (3) **оказывается полезной для нахождения первых интегралов** ее, ибо используя свойство ряда равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n}, \tag{30}$$

нам иногда удается построить интегрируемые комбинации, которые и дают искомые первые интегралы.

Заметим, однако, что очень часто мы не сможем таким путем найти достаточное количество независимых первых интегралов и тем самым построить общий интеграл системы (2). Тогда, используя уже найденные первые интегралы, нужно пытаться упростить задачу, либо понижая порядок системы, либо находя другие первые интегралы. Сказанное относится, конечно, и к тому случаю, когда система уже задана в симметрической форме.

Пример 1. Найти общий интеграл системы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - z}{z - y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}. \tag{31}$$

---

* Ибо, исключая t, мы автоматически исключим и C_n, так как t и C_n входят в $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в виде суммы $t + C_n$.

Переписывая эту систему в симметрической форме, имеем:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\dfrac{x-z}{z-y}}=\frac{dz}{\dfrac{y-x}{z-y}}, \tag{32}$$

или (умножая все знаменатели на $z-y$)

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \tag{33}$$

Складывая числители и знаменатели, получим:

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0}. \tag{34}$$

Отсюда $dx+dy+dz=0$ или $d(x+y+z)=0$. Следовательно, семейство плоскостей

$$\psi_1\equiv x+y+z=C_1 \tag{35}$$

есть *первый интеграл* системы (31).

Для получения другого первого интеграла умножим числители и знаменатели дробей (33) соответственно на $2x$, $2y$, $2z$ и сложим числители и знаменатели полученных дробей:

$$\frac{2x\,dx}{2x\,(z-y)}=\frac{2y\,dy}{2y\,(x-z)}=\frac{2z\,dz}{2z\,(y-x)}=\frac{d\,(x^2+y^2+z^2)}{0}. \tag{36}$$

Отсюда видим, что семейство сфер

$$\psi_2\equiv x^2+y^2+z^2=C_2^2 \tag{37}$$

представляет собою *первый интеграл* системы (31). Первые интегралы (35) и (37), очевидно, *независимы*, так что совокупность их дает *общий интеграл* системы (31).

Пример 2. Проинтегрировать систему:

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}. \tag{38}$$

Из

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2} \tag{39}$$

имеем *первый интеграл*

$$\psi_1\equiv z-2y=C_1. \tag{40}$$

Воспользуемся свойством ряда равных отношений. Вычитая в системе (38) из числителя и знаменателя последней дроби числители и знаменатели первых двух дробей, имеем:

$$\frac{d\,(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}. \tag{41}$$

Эта интегрируемая комбинация дает *другой первый интеграл*

$$\psi_2\equiv 2\sqrt{z-y-x}+y=C_2. \tag{42}$$

Построение общего интеграла системы (38) закончено.

Пример 3. Проинтегрировать систему:

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}. \tag{43}$$

Запишем эту систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1-\frac{1}{z}}=\frac{dz}{\frac{1}{y-x}}. \tag{44}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{1}=\frac{z\,dy}{z-1}=\frac{(y-x)\;dz}{1}. \tag{45}$$

Составим пропорцию

$$\frac{z\;(dy-dx)}{-1}=\frac{(y-x)\;dz}{1}. \tag{46}$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{dy-dx}{-(y-x)}=\frac{dz}{z} \quad \text{или} \quad \frac{d\;(y-x)}{y-x}+\frac{dz}{z}=0. \tag{47}$$

Интегрируя, найдем *первый интеграл*

$$(y-x)\;z=C_1. \tag{48}$$

Найдя отсюда z и подставив в первое уравнение системы (43), будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{y-x}{C_1} \tag{49}$$

или

$$dy=dx-\frac{y-x}{C_1}\;dx, \quad \frac{d\;(y-x)}{y-x}+\frac{dx}{C_1}=0, \tag{50}$$

откуда:

$$\ln\;(y-x)+\frac{x}{C_1}=\ln C_2, \quad (y-x)\;e^{\frac{x}{C_1}}=C_2. \tag{51}$$

Заменив в последнем равенстве C_1 ее значением из (48), найдем *другой первый интеграл*

$$(y-x)\;e^{\frac{x}{(y-x)\;z}}=C_2. \tag{52}$$

Пример 4. Найти два независимых интеграла системы:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}. \tag{53}$$

Имеем: $dy=0$, $y=C_1$. Следовательно,

$$\psi_1=y \tag{54}$$

есть интеграл системы (53).

Заменим в равенстве $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{y}$ величину y на C_1:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{C_1}. \tag{55}$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$z = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}. \tag{56}$$

Отсюда, разрешая относительно C_2 и заменяя C_1 на y, получаем:

$$ze^{-\frac{x}{y}} = C_2. \tag{57}$$

Следовательно,

$$\psi_2 = ze^{-\frac{x}{y}} \tag{58}$$

есть интеграл системы (53).

Интегралы ψ_1 и ψ_2 очевидно независимы.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА ПИКАРА)

118. Предварительные замечания. В предыдущих главах мы изложили основные понятия и определения, относящиеся к уравнению первого порядка, нормальной системе уравнений первого порядка, уравнению n-го порядка и системе уравнений высших порядков. Мы указали там, что основной задачей интегрирования как одного дифференциального уравнения, так и системы уравнений, является нахождение всех решений и изучение их свойств.

Если удается выразить все решения в элементарных функциях, то исследование свойств решений не представляет большого труда. Однако такие случаи представляют собою редкое исключение.

Гораздо большее число уравнений удается проинтегрировать в квадратурах. Но и эти уравнения встречаются довольно редко. Наиболее известные типы таких уравнений мы рассмотрели в предыдущих главах.

В общем случае дифференциальное уравнение не интегрируется в квадратурах. Тогда применяют приближенные методы интегрирования. При этом обычно ищут решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям, а именно решают задачу Коши или граничную (краевую) задачу.

Предположим, что решается задача Коши, т. е. ищется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. В этом случае приближенные способы могут дать реальное представление об искомом решении дифференциального уравнения только тогда, когда нам заранее известно, что решение с заданными начальными условиями существует, единственно и определено в интересующем нас интервале изменения независимой переменной.

Мы изложим доказательство трех основных теорем существования решения задачи Коши: теоремы Пикара, теоремы

Коши и теоремы Пеано, соответствующих основным условиям, которым обычно подчинены дифференциальные уравнения. Две из них (теорема Пикара и теорема Коши) устанавливают не только существование, но и единственность решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Эти теоремы существования и единственности имеют принципиальное значение для всего естествознания, ибо они устанавливают условия, гарантирующие возможность нахождения вполне определенного закона того или иного явления по дифференциальным свойствам его и по начальным данным. Это особенно важно потому, что для многих явлений природы соответствующие им законы выражаются только при помощи дифференциальных уравнений.

Приближенные методы, поскольку они дают лишь решение конкретной задачи Коши, т. е. решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, не позволяют полностью характеризовать даже это решение и совершенно ничего не могут сказать ни о свойствах решений с другими начальными условиями, ни о наличии решений с теми или иными наперед заданными интересующими нас особенностями их поведения.

В связи с этим возникает потребность в построении общей теории дифференциальных уравнений, методы которой давали бы возможность судить о свойствах всех решений любого дифференциального уравнения только по его аналитической структуре и позволяли бы дать ответ на вопрос о существовании решения с заданными свойствами. Устанавливая условия, гарантирующие наличие решения, обладающего интересующими нас свойствами, общая теория дает также и методы приближенного, а иногда и точного построения этого решения.

Основная задача общей теории дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы установить связь между свойствами решений уравнения и свойствами самого уравнения, а именно выяснить, какими свойствами обладают решения того или иного дифференциального уравнения и каким условиям следует подчинить правую часть уравнения, чтобы оно допускало решение, обладающее теми или иными наперед заданными свойствами.

Основой этой общей теории являются вышеуказанные теоремы существования.

Заметим, что так как уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, и канонические системы уравнений высшего порядка всегда могут быть приведены к нормальной системе уравнений*, то доказательство теорем существования достаточно проводить лишь для нормальных систем. Так мы и будем поступать в настоящей главе.

---

* См. п. **112** и **114**.

119. Формулировка теоремы Пикара для нормальной системы n уравнений. Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

и пусть поставлена задача Коши: найти решение системы (1′), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \qquad (2')$$

где x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ — некоторые заданные постоянные числа, т. е. требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Предположим, что правые части системы (1′) определены в некоторой замкнутой области R:

$$|x - x_0| \leqslant a,\quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant b,\quad |y_2 - y_2^{(0)}| \leqslant$$
$$\leqslant b,\ \ldots,\ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b \qquad (3')$$

с точкой $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ внутри (a и b — заданные положительные числа).

Установим условия, обеспечивающие существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения поставленной задачи Коши.

Теорема Пикара. *Пусть правые части системы (1′) удовлетворяют в области R следующим двум условиям:*

I) *функции f_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) непрерывны по всем своим аргументам и, следовательно (в силу замкнутости и ограниченности R), ограничены, т. е.*

$$|f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4')$$

где M — постоянное положительное число, а $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — любая точка области R;

II) *функции f_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е.*

$$|f_k(x, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}) - f_k(x, \overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{y_2}}, \ldots, \overline{\overline{y_n}})| \leqslant L \sum_{l=1}^{n} |\overline{y_l} - \overline{\overline{y_l}}|, \qquad (5')$$

где L — постоянное положительное число (константа Липшица), а $(x, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})$ и $(x, \overline{\overline{y_1}}, \overline{\overline{y_2}}, \ldots, \overline{\overline{y_n}})$ — любые две точки области R.

Тогда система (1′) *имеет единственное решение:*

$$y_1 = y_1(x),\quad y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{6′}$$

удовлетворяющее начальным условиям (2′). *Это решение заведомо определено и непрерывно дифференцируемо в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{7′}$$

где

$$h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right) \tag{8′}$$

и не выходит при этих значениях x *из области* R, *т. е.*

$$|y_1(x) - y_1^{(0)}| \leqslant b,\quad |y_2(x) - y_2^{(0)}| \leqslant b,\ \ldots,\ |y_n(x) - y_n^{(0)}| \leqslant b$$
$$\text{при}\quad |x - x_0| \leqslant h. \tag{9′}$$

Замечание. Условие Липшица представляет собою оценку роста правых частей системы (1′) по аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем, как мы видим из (5′) эта оценка равномерна относительно x в интервале $|x - x_0| \leqslant a$.

Условие Липшица будет, в частности, выполнено, если все функции f_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) *имеют ограниченные в области* R *частные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *т. е.*

$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_l}\right| \leqslant K \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{*}$$

где K — *некоторое постоянное положительное число,* $a(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — *любая точка области* R.

Действительно, в этом случае, используя последовательно формулу конечных приращений (формулу Лагранжа), мы имеем:

$$f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n) =$$
$$= [f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)] +$$
$$+ [f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{y}_n)] + \ldots +$$
$$+ [f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_{n-1}, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_{n-1}, \bar{\bar{y}}_n)] =$$
$$= \frac{\partial f_k[x, \bar{\bar{y}}_1 + \theta_{1k}(\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1), \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n]}{\partial y_1}(\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1) +$$
$$+ \frac{\partial f_k[x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2 + \theta_{2k}(\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2), \ldots, \bar{y}_n]}{\partial y_2}(\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2) + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f_k[x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_{n-1}, \bar{\bar{y}}_n + \theta_{nk}(\bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n)]}{\partial y_n}(\bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n)$$
$$(0 < \theta_{lk} < 1,\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда и вытекает условие Липшица, если принять во внимание неравенства (*), причем $L = K$.

При $n = 1$, т. е. в случае одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

условие Липшица (для правой части) относительно y имеет вид

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{\overline{y}})| \leqslant L\,|\overline{y} - \overline{\overline{y}}|.$$

Оно заведомо выполнено, если в области задания уравнения частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leqslant K.$$

Условие Липшица не предполагает существование соответствующих частных производных, вследствие этого оно является более общим. Например, для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = |y| \quad (f(x, y) \equiv |y|)$$

частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точках оси $Ox\,(y = 0)$ не существует. Однако (по свойству абсолютной величины разности) имеем

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{\overline{y}})| = |\,|\overline{y}| - |\overline{\overline{y}}|\,| \leqslant |\overline{y} - \overline{\overline{y}}|,$$

так что условие Липшица выполнено на всей плоскости (x, y), причем $L = 1$*.

Заменяя условие Липшица (более сильным) требованием существования и ограниченности соответствующих частных производных, мы получаем упрощенные формулировки теоремы Пикара для нормальной системы n уравнений (п. **106**) и для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной (п. **7**).

120. Доказательство теоремы Пикара для нормальной системы двух уравнений. С целью упрощения записи, мы будем доказывать сформулированную выше теорему Пикара для случая $n = 2$. При этом ход доказательства для случая n уравнений становится очевидным.

Итак, будем рассматривать систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{2}$$

* Подробнее относительно условия Липшица см.: Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Изд-во ЛГУ, 1965, стр. 158—161.

Предположим, что *в области*

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b,\quad |z-z_0|\leqslant b, \tag{3}$$

где a и b — заданные положительные числа, правые части системы (1) удовлетворяют двум условиям:

I) *$f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ непрерывны и, следовательно, ограничены:*

$$|f_1(x, y, z)|\leqslant M,\quad |f_2(x, y, z)|\leqslant M; \tag{4}$$

II) *$f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ удовлетворяют условию Липшица относительно y и z:*

$$\left.\begin{aligned} |f_1(x, \overline{y}, \overline{z})-f_1(x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})|\leqslant L(|\overline{y}-\overline{\overline{y}}|+|\overline{z}-\overline{\overline{z}}|),\\ |f_2(x, \overline{y}, \overline{z})-f_2(x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})|\leqslant L(|\overline{y}-\overline{\overline{y}}|+|\overline{z}-\overline{\overline{z}}|), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где L — постоянное положительное число, а $(x, \overline{y}, \overline{z})$ и $(x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})$ — любые две точки области R.

Докажем, что *при сделанных предположениях система (1) имеет единственное решение*

$$y=y(x),\quad z=z(x), \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям (2), и что это решение заведомо определено и непрерывно дифференцируемо в интервале:

$$|x-x_0|\leqslant h, \tag{7}$$

где

$$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{8}$$

и не выходит при этих значениях x из области R, т. е.

$$|y(x)-y_0|\leqslant b,\quad |z(x)-z_0|\leqslant b\quad \textit{при}\quad |x-x_0|\leqslant h. \tag{9}$$

С этой целью заменим уравнения (1) с начальными условиями (2) равносильной им **системой интегральных уравнений**.

Предположим, что искомое решение (6) найдено. Тогда, подставляя его в систему (1), мы получим тождества:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d[y(x)]}{dx}\equiv f_1[x, y(x), z(x)],\\ \frac{d[z(x)]}{dx}\equiv f_2[x, y(x), z(x)] \end{aligned}\right\}\ (|x-x_0|<h). \tag{10}$$

Интегрируя их по x в пределах от x_0 до x и принимая во внимание начальные условия (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} y(x) - y_0 &\equiv \int_{x_0}^{x} f_1[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx, \\ z(x) - z_0 &\equiv \int_{x_0}^{x} f_2[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (|x - x_0| \leqslant h).$$

Перенося в этих тождествах числа y_0 и z_0 вправо, заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} y(x) &\equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx \\ z(x) &\equiv z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx \end{aligned}\right\} \quad (|x - x_0| \leqslant h). \qquad (11)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y,\ z)\,dx, \\ z &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y,\ z)\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где y и z суть неизвестные функции от x. Такая система уравнений называется *системой интегральных уравнений. Решением* системы интегральных уравнений (12) называется совокупность функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, определенных в некотором интервале и обращающих (в этом интервале) уравнения системы (12) в тождества.

Из тождеств (11) мы видим, что функции (6) образуют решение системы (12).

Итак, решение (6) системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) является решением системы интегральных уравнений (12).

Обратно, решение $y = y(x)$, $z = z(x)$ системы интегральных уравнений (12), определенное и непрерывное в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ и не выходящее, при этих значениях x, из области R, будет искомым решением системы (1).

Действительно, подставляя это решение в систему (12), получим тождества (11). Подынтегральные функции $f_1[x,\ y(x),\ z(x)]$ и $f_2[x,\ y(x),\ z(x)]$, рассматриваемые как сложные функции от x будут непрерывными функциями от x в интервале $|x - x_0| \leqslant h$, ибо функции $f_1(x,\ y,\ z)$ и $f_2(x,\ y,\ z)$ непрерывны относительно всех своих аргументов в области R, а функции $y = y(x)$, $z = z(x)$, согласно предположению, определены и непрерывны в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ и не выходят при этих значениях x из области R. Поэтому из (11) следует, что функции $y = y(x)$, $z = z(x)$ непрерывно дифференцируемы в интервале $|x - x_0| \leqslant h$, так как определенный интеграл с переменным верхним пределом x от непрерывной функции от x является непрерывно дифференцируемой функцией верхнего предела. Дифференцируя тождества (11), мы получим тождества (10), так что рассматриваемое решение системы интегральных уравнений (12) является решением системы (1), определенным и непрерывно дифференцируемым в интервале $|x - x_0| \leqslant h$. Начальные условия (2), как следует из уравнений (12), выполняются автоматически.

Из приведенных рассуждений следует, что **для доказательства теоремы Пикара нам достаточно установить существование и единственность решения системы интегральных уравнений (12), определенного и непрерывного в интервале (7) и не выходящего при этих значениях x из области R.**

Докажем сначала **существование** решения системы интегральных уравнений (12). Применим для этого *метод последовательных приближений Пикара.*

За исходное (нулевое) приближение, $y_0(x)$, $z_0(x)$, примем функции, равные тождественно соответствующим начальным значениям искомых функций: $y_0(x) \equiv y_0$, $z_0(x) \equiv z_0$.

Заменим в подынтегральных функциях системы (12) переменные y и z нулевым приближением. Полученные функции возьмем в качестве *первого приближения*:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\, dx, \\ z_1(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

За второе приближение возьмем

$$\left.\begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1)\, dx, \\ z_2(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Вообще в качестве *n-го приближения* возьмем функции, определяемые соотношениями

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx, \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Таким образом, мы построим две последовательности функций:

$$\left.\begin{array}{l} y_0,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots, \\ z_0,\ z_1(x),\ z_2(x),\ \ldots,\ z_n(x),\ \ldots \end{array}\right\} \tag{16}$$

Дальнейшее доказательство существования решения разобьем на три части.

1. Докажем, что *все функции последовательности* (16) *определены и непрерывны в промежутке* $|x-x_0| \leqslant h$ *и не выходят из области* R, т. е. для всех значений n имеют место неравенства

$$|y_n(x)-y_0| \leqslant b, \quad |z_n(x)-z_0| \leqslant b \quad \text{при} \quad |x-x_0| \leqslant h. \tag{17}$$

Для этого применим метод математической индукции. Рассмотрим сначала функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$. Формулы (13) показывают, что эти функции определены и непрерывны во всем интервале $|x-x_0| \leqslant a$, ибо функции $f_1(x, y_0, z_0)$ и $f_2(x, y_0, z_0)$ непрерывны в этом интервале, а определенный интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции представляет собою, как известно, непрерывную функцию своего верхнего предела в том же интервале.

Оценим теперь разности $y_1(x)-y_0$, $z_1(x)-z_0$. Имеем*:

$$\left.\begin{array}{l} |y_1(x)-y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f_1(x_1, y_0, z_0)|\,dx\right| \leqslant \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant M\,|x-x_0|, \\ |z_1(x)-z_0| \leqslant M\,|x-x_0|. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Отсюда видно, что функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$ не выйдут из области R, т. е. будут выполняться неравенства

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant b, \quad |z_1(x)-z_0| \leqslant b,$$

если потребовать, чтобы $M\,|x-x_0| \leqslant b$, т. е. $|x-x_0| \leqslant \dfrac{b}{M}$.

Поэтому, если

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

то при $|x-x_0| \leqslant h$ функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$ будут определены, непрерывны и не выйдут из области R.

Итак, наше утверждение справедливо для функций $y_1(x)$ и $z_1(x)$.

---

* Здесь мы используем известную формулу

$$\left|\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\,dx\right|.$$

Предположим теперь, что оно справедливо для функций $y_{n-1}(x)$ и $z_{n-1}(x)$, и докажем, что оно тогда верно и для функций $y_n(x)$ и $z_n(x)$.

Для этого обратимся к формулам (15). Прежде всего из этих формул мы видим, что функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ определены и непрерывны в интервале $|x-x_0| \leqslant h$. Действительно, так как функции $y_{n-1}(x)$ и $z_{n-1}(x)$ определены и непрерывны в интервале $|x-x_0| \leqslant h$ и не выходят при этих значениях x из области R, то функции $f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})$ и $f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1})$, рассматриваемые как сложные функции от x, тоже непрерывны в интервале $|x-x_0| \leqslant h$, а тогда из формул (15) следует, что функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ будут определены и непрерывны в этом же интервале.

Далее мы имеем оценки:

$$\left.\begin{aligned} &|y_n(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})|\, dx \right| \leqslant M|x-x_0| \leqslant b, \\ &|z_n(x) - z_0| \leqslant b \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

при $|x-x_0| \leqslant h$, т. е. $y_n(x)$ и $z_n(x)$ не выходят из области R при $|x-x_0| \leqslant h$.

Из приведенных рассуждений и вытекает, что все функции последовательностей (16) определены и непрерывны в промежутке $|x-x_0| \leqslant h$ и не выходят при этих значениях x и области R.

2. Докажем теперь, что *последовательности* (16) *равномерно сходятся в интервале* $|x-x_0| \leqslant h$ *и, следовательно, предельные функции непрерывны в этом интервале.*

Для этого заметим, что сходимость последовательностей (16) равносильна сходимости рядов:

$$\left.\begin{aligned} &y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \\ &z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

так как частными суммами этих рядов являются как раз $y_n(x)$ и $z_n(x)$.

Оценим члены рядов (20). Мы уже имели оценки*:

$$\left.\begin{aligned} |y_1 - y_0| \leqslant M|x-x_0|, \\ |z_1 - z_0| \leqslant M|x-x_0|. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Оценим разности $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$. Из равенств (14) и (13) находим, что

$$y_2 - y_1 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1)\, dx - \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\, dx =$$

---

* См. формулы (18)

$$=\int_{x_0}^{x}[f_1(x,\ y_1,\ z_1)-f_1(x,\ y_0,\ z_0)]\ dx.$$

Отсюда:

$$|y_2-y_1|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_1(x,\ y_1,\ z_1)-f_1(x,\ y_0,\ z_0)|\ dx\right|.$$

Используя условие Липшица и принимая во внимание оценки (21) для разностей y_1-y_0 и z_1-z_0, получаем:

$$|y_2-y_1|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}(|y_1-y_0|+|z_1-z_0|)\ dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2LM\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|\ dx\right|=2LM\ \frac{|x-x_0|^2}{2!}.$$

Аналогичным путем для разности z_2-z_1 получаем такую же оценку:

$$|z_2-z_1|\leqslant 2LM\ \frac{|x-x_0|^2}{2!}.$$

Предположим теперь, что справедливы оценки:

$$\left.\begin{aligned}|y_n-y_{n-1}|&\leqslant M\,(2L)^{n-1}\ \frac{|x-x_0|^n}{n!},\\ |z_n-z_{n-1}|&\leqslant M\,(2L)^{n-1}\ \frac{|x-x_0|^n}{n!}.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Покажем, что тогда имеют место оценки:

$$\left.\begin{aligned}|y_{n+1}-y_n|&\leqslant M\ (2L)^n\ \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\\ |z_{n+1}-z_n|&\leqslant M\ (2L)^n\ \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Действительно, мы имеем:

$$y_{n+1}-y_n=\int_{x_0}^{x}[f_1(x,\ y_n,\ z_n)-f_1(x,\ y_{n-1},\ z_{n-1})]\ dx.$$

Отсюда:

$$|y_{n+1}-y_n|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_1(x,\ y_n,\ z_n)-f_1(x,\ y_{n-1},\ z_{n-1})|\ dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}(|y_n-y_{n-1}|+|z_n-z_{n-1}|)\ dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2L\left|\int_{x_0}^{x}M\,(2L)^{n-1}\ \frac{|x-x_0|^n}{n!}\ dx\ \right|\leqslant M\ (2L)^n\ \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Аналогично получаем:

$$|z_{n+1} - z_n| \leqslant M\,(2L)^n\,\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но мы уже убедились выше, что оценки (22) справедливы для $n = 1$ и $n = 2$. Следовательно, они верны для всех n.

Из оценок (22) следует, что для интересующих нас значений x, т. е. для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| \leqslant h$, мы имеем следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} |y_n - y_{n-1}| &\leqslant M\,(2L)^{n-1}\,\frac{h^n}{n!},\\ |z_n - z_{n-1}| &\leqslant M\,(2L)^{n-1}\,\frac{h^n}{n!} \end{aligned}\right\} \qquad (22')$$

при $|x - x_0| \leqslant h$.

В силу первой из этих оценок члены первого из рядов (20) не превосходят для всех значений x из интервала $|x - x_0| \leqslant h$ по абсолютной величине соответствующих членов следующего сходящегося ряда с положительными членами

$$|y_0| + Mh + M2L\,\frac{h^2}{2!} + M\,(2L)^2\,\frac{h^3}{3!} + \ldots + M\,(2L)^{n-1}\,\frac{h^n}{n!} + \ldots =$$

$$= |y_0| + \frac{M}{2L}\left(2Lh + \frac{(2Lh)^2}{2!} + \frac{(2Lh)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2Lh)^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= |y_0| + \frac{M}{2L}\,(e^{2Lh} - 1). \qquad (24)$$

Следовательно, согласно признаку **В е й е р ш т р а с с а***, первый из рядов (20) сходится и притом **р а в н о м е р н о** в промежутке $|x - x_0| \leqslant h$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость (в том же интервале) второго из рядов (20).

Обозначим суммы рядов (20) или, что то же, **п р е д е л ь н ы е ф у н к ц и и** последовательностей (16) через $y(x)$ и $z(x)$. Так как все члены рядов (20) непрерывны в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ и эти ряды сходятся равномерно в интервале $|x - x_0| \leqslant h$, то по теореме о непрерывности суммы ряда** функции $y(x)$ и $z(x)$ также **н е п р е р ы в н ы** в этом интервале.

Таким образом, последовательности (16) равномерно сходятся в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ и предельные функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны в этом интервале.

3. Докажем, наконец, что *предельные функции* $y(x)$ и $z(x)$ *не выходят из области R при* $|x - x_0| \leqslant h$, т. е.

---

* См.: Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц. Основы математического анализа, т. II. М. Гостехиздат, 1956, стр. 74.

** Т а м ж е, стр. 76, теорема 1.

$$|y(x)-y_0|\leqslant b,\quad |z(x)-z_0|\leqslant b \quad \text{при} \quad |x-x_0|\leqslant h \tag{25}$$

и удовлетворяют системе интегральных уравнений (12).

В самом деле, переходя к пределу в неравенствах (17), мы получим неравенства (25).

Покажем теперь, что предельные функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют системе (12). Для этого заметим сперва, что

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_n,\ z_n)\,dx &= \int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y,\ z)\,dx,\\ \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y_n,\ z_n)\,dx &= \int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y,\ z)\,dx \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

при $|x-x_0|\leqslant h$. Действительно, мы имеем:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_n,\ z_n)\,dx-\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y,\ z)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f_1(x,\ y_n,\ z_n)-f_1(x,\ y,\ z)|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}(|y_n-y|+|z_n-z|)\,dx\right|.$$

Так как $y_n(x)$ и $z_n(x)$ сходятся равномерно к $y(x)$ и $z(x)$ в $|x-x_0|\leqslant h$, то по любому наперед заданному положительному числу ε найдется номер N_ε такой, что при $n>N_\varepsilon$ выполняются неравенства $|y_n-y|<\varepsilon$, $|z_n-z|<\varepsilon$ для всех x из интервала $|x-x_0|\leqslant h$ одновременно. Поэтому, продолжая предыдущую оценку, получаем:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_n,\ z_n)\,dx-\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y,\ z)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2L\varepsilon\,|x-x_0|\leqslant 2L\varepsilon h\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Аналогично получаем оценку:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y_n,\ z_n)\,dx-\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y,\ z)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2L\varepsilon\,|x-x_0|\leqslant 2L\varepsilon h\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Из этих двух оценок и следуют соотношения (26).

Теперь, переходя в тождествах (15) к пределу при $n\to\infty$, мы получим тождества (11), следовательно, найденные нами функции $y(x)$ и $z(x)$ образуют решение системы интегральных уравнений (12). Это решение определено и непрерывно в интервале $|x-x_0|\leqslant h$ и не выходит при этих значениях x из области R, а тогда, как показано выше, функции $y=y(x)$, $z=z(x)$ представляют собою решение системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2), определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале $|x-x_0|\leqslant h$.

Таким образом, существование решения (6) доказано.

Докажем теперь, что *это решение единственное**. Допустим, что существует другое решение: $y=y^*(x)$, $z=z^*(x)$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, определенное и непрерывное в некотором интервале $|x-x_0|\leqslant h'$, где $0<h'\leqslant h$ и не выходящее при этих значениях x из области R. Тогда мы имеем тождества:

$$\left.\begin{aligned} y^* &\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y^*,\ z^*)\ dx, \\ z^* &\equiv z_0+\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y^*,\ z^*)\ dx \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

при $|x-x_0|\leqslant h'$.

Оценим разности y_n-y^*, z_n-z^*. Используя формулы (15) и (27), а также условие Липшица, получаем:

$$\left.\begin{aligned} |y_n-y^*| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f_1(x,\ y_{n-1},\ z_{n-1})-f_1(x,\ y^*,\ z^*)|\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} (|y_{n-1}-y^*|+|z_{n-1}-z^*|)\ dx\right|, \\ |z_n-z^*| &\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} (|y_{n-1}-y^*|+|z_{n-1}-z^*|)\ dx\right|. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Полученные оценки имеют рекуррентный характер. Чтобы найти из них интересующие нас оценки разностей y_n-y^*, z_n-z^*, оценим сначала разности $y_0(x)-y^*$, $z_0(x)-z^*$. Пользуясь (27), имеем:

$$\left.\begin{aligned} |y_0(x)-y^*| &= |y_0-y^*| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f_1(x,\ y^*,\ z^*)|\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant M\,|x-x_0|, \\ |z_0(x)-z^*| &\leqslant M\,|x-x_0|. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

* Мы доказываем единственность методом Гурса (Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II. 1936, стр. 322—323). Другое доказательство единственности см. в кн.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 147—149.

Полагая теперь в формулах (28) $n = 1$ и принимая во внимание (29), получаем оценки разностей $y_1 - y^*$, $z_1 - z^*$:

$$\left. \begin{aligned} |y_1 - y^*| &\leqslant L\cdot 2M \frac{|x-x_0|^2}{2}, \\ |z_1 - z^*| &\leqslant L\cdot 2M \frac{|x-x_0|^2}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

Полагая в (28) $n = 2$ и используя оценки (30), найдем:

$$\left. \begin{aligned} |y_2 - y^*| &\leqslant L\cdot 2\cdot L\cdot 2M \frac{|x-x_0|^3}{3!} = M(2L)^2 \frac{|x-x_0|^3}{3!}, \\ |z_2 - z^*| &\leqslant M(2L)^2 \frac{|x-x_0|^3}{3!}. \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

Продолжая эти рассуждения, получим искомые оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y^*| &\leqslant M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z^*| &\leqslant M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Правые части неравенств (32) стремятся к нулю при $n \to \infty$ как общий член сходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{2L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{2L}\left(e^{2L|x-x_0|} - 1\right).$$

Поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y^*, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \text{при} \quad |x-x_0| \leqslant h'.$$

Но мы уже доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{при} \quad |x-x_0| \leqslant h.$$

Поэтому $y^*(x) \equiv y(x)$, $z^*(x) \equiv z(x)$ при $|x-x_0| \leqslant h'$, т. е. решение $y = y^*(x)$, $z = z^*(x)$ совпадает (на интервале $|x-x_0| < h'$) с решением $y = y(x)$, $z = z(x)$, построенным в теореме Пикара, что и доказывает единственность последнего*.

Доказанная теорема Пикара имеет простой геометрический и механический смысл.

С геометрической точки зрения она, как уже отмечено выше, устанавливает достаточные условия для того, чтобы через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проходила одна и только одна гладкая интегральная кривая системы (1).

---

* Изложенное доказательство теоремы существования и единственности можно значительно сократить, если воспользоваться принципом сжатых отображений (см.: И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1952, стр. 62—67, 125—133; Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957, стр. 44—49.).

С механической точки зрения эта теорема дает достаточные условия, при выполнении которых система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= P(t, x, y), \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где t — время, а x и y — координаты точки на плоскости (x, y), определяет единственное «гладкое» движение:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{34}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = x_0, \ y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{35}$$

Отметим в заключение, что изложенный метод доказательства теоремы Пикара (метод последовательных приближений) не только дает возможность установить самый факт существования решения, но и позволяет строить приближенное решение, а именно приближения к решению дают функции $y_n(x)$, $z_n(x)$.

При этом погрешность от замены точного решения $y(x)$, $z(x)$ приближенным решением $y_n(x)$, $z_n(x)$ оценивается формулами

$$\left.\begin{aligned} |y_n - y| &\leqslant M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z| &\leqslant M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}\right\}$$

Действительно теми же рассуждениями, что и в доказательстве единственности решения, мы получим, что

$$\left.\begin{aligned} |y_n - y| &\leqslant M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z| &\leqslant M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}\right\} \tag{32'}$$

откуда и следует указанная выше оценка погрешности.

При доказательстве теоремы Пикара мы использовали условие Липшица. Существование непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши, как уже отмечалось в п. **105**, гарантируется теоремой Пеано и без выполнения условия Липшица, при единственном предположении о непрерывности правых частей системы дифференциальных уравнений в окрестности начальных данных. Однако теорема Пеано не гарантирует единственности решения*. Тем не менее, в общей теории дифференциальных уравнений теорема Пеано играет важную роль. Чтобы не отвлекать внимание читателя от рассуждений, связанных непосредственно с теоремой Пикара, мы изложим доказательство теоремы Пеано несколько далее**.

121. Замечание о выборе нулевого приближения. В качестве нулевого приближения мы не обязательно должны брать начальные значения искомых функций. Можно взять любые непрерывные функции, не выходящие из области R при $|x-x_0|\leqslant h$. При этом сами последовательные приближения изменятся, но предельные функции останутся теми же вследствие единственности решения. Здесь сказывается замечательное свойство изложенного метода последовательных приближений: *результат не зависит от выбора исходного приближения.* Последнее не обязано удовлетворять ни дифференциальному уравнению, ни начальным условиям, ибо отклонение от искомого решения в нулевом приближении исправляется последующими приближениями.

В следующих пунктах мы распространяем теорему Пикара на случай других областей задания правых частей системы (1), рассматриваем вопрос о продолжении решения, выясняем особенности теоремы Пикара для линейной системы, а также рассматриваем вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка.

122. Случай одностороннего интервала изменения независимой переменной.

Теорема. *Предположим, что в области вида R:*

$$x_0\leqslant x\leqslant x_0+a,\ \ (x_0-a\leqslant x\leqslant x_0),\ \ |y-y_0|\leqslant b,\ \ |z-z_0|\leqslant b, \tag{36}$$

правые части системы (1),

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,\ y,\ z),$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,\ y,\ z),$$

удовлетворяют условиям теоремы Пикара п. **120.** *Тогда система (1) имеет единственное решение (6), удовлетворяющее начальным условиям* (2),

$$y=y_0,\ \ z=z_0\quad при\quad x=x_0,$$

---

* Единственность решения можно доказать и при более слабом условии, чем условие Липшица. См., например теорему Осгуда в кн.: И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, стр. 49—52, 119—122.

** См. § 6.

определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале:

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, \quad (x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0) \left[h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right]. \tag{37}$$

Для доказательства нужно повторить все рассуждения п. **120**, заменяя всюду двусторонний интервал изменения независимой переменной, $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, односторонним интервалом $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$ $(x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0)$.

В двух следующих пунктах мы формулируем замечания для двустороннего интервала, однако все остается справедливым и для случая одностороннего интервала.

123. Случай области, не ограниченной по искомым функциям.

Теорема. *Предположим, что в области вида R:*

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y| < +\infty, \quad |z| < +\infty, \tag{38}$$

правые части системы (1) *удовлетворяют условиям теоремы Пикара, а именно:*

I) *функции* $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ *непрерывны по всем аргументам и*

II) *функции* $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ *удовлетворяют условию Липшица относительно y и z, причем существует константа Липшица L, одна и та же для всей бесконечной области* (38).

При указанных условиях система (1) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* (6), *определенное во всем интервале $|x - x_0| \leqslant a$ и удовлетворяющее начальным условиям* (2), *причем начальные значения искомых функций* y_0 и z_0 *можно брать любыми.*

Здесь, в отличие от теоремы Пикара п. **120**, мы не предполагаем ограниченности функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ во всей области R. Но она и не потребуется.

Доказательство. Пусть заданы любые начальные значения искомых функций y_0 и z_0. Тогда, повторяя рассуждения теоремы Пикара п. **120**, нетрудно убедиться, что система (1) имеет единственное решение (6), в котором $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$, причем это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале $|x - x_0| \leqslant a$.

В самом деле, последовательные приближения будут определены во всем интервале $|x - x_0| \leqslant a$, ибо в случае теоремы Пикара п. **120** мы сжимали интервал изменения независимой переменной лишь для того, чтобы последовательные приближения не вышли из области R. Теперь этой опасности нет, ибо область R неограничена по искомым функциям.

Далее, при исследовании сходимости рядов (20) мы будем оценивать разности $y_1 - y_0$ и $z_1 - z_0$, пользуясь формулами (13), где функции $f_1(x, y_0, z_0)$ и $f_2(x, y_0, z_0)$, будучи функциями только от x, непрерывными в замкнутом интервале $|x - x_0| \leqslant a$, ограничены. Поэтому мы опять получим оценки вида (21). При оценке же последующих разностей $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, . . . мы используем каждый раз лишь условие Липшица и оценки предыдущих разностей. Из этих оценок вытекает, что ряды (20) сходятся равномерно **во всем** интервале $|x - x_0| \leqslant a$. Следовательно, решение (6) будет определено и непрерывно дифференцируемо **во всем** интервале $|x - x_0| \leqslant a$, причем $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

Единственность решения (6) доказывается так же, как и в п. **120**.

124. Случай области, не ограниченной по всем переменным. *Предположим, что в области вида* R:

$$|x| < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |z| < +\infty \tag{39}$$

правые части системы (1) *удовлетворяют условию* I *теоремы Пикара* п. **120**, *т. е. функции* $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ *определены и непрерывны во всякой точке пространства* (x, y, z). Относительно выполнения условия Липшица будем различать два случая.

1. *Функции* $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ *удовлетворяют условию Липшица относительно* y *и* z, *причем для любой области вида* (38) *имеется постоянная* L *одна и та же для всей области. В этом случае существует единственное решение* (6), *удовлетворяющее начальным условиям* (2), *где* ***все*** *начальные данные* x_0, y_0 и z_0 *можно выбирать* ***любыми***, *т. е. через любую точку* (x_0, y_0, z_0) *проходит единственное решение* (6) *системы* (1). *Это решение определено и непрерывно дифференцируемо при всех значениях* x.

В самом деле, пусть (x_0, y_0, z_0) — **любая** заданная точка. Тогда, взяв в области (39) вместо **бесконечного** интервала изменения независимой переменной **конечный** интервал вида $|x - x_0| \leqslant a$, где a — **любое** положительное число, мы на основании п. **123** можем утверждать, что **через точку** (x_0, y_0, z_0) **проходит единственное решение, определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале** $|x - x_0| \leqslant a$.

Далее, **какую бы** точку $x = x^*$ ни взять, всегда можно выбрать число a настолько большим, что $x = x^*$ будет лежать **внутри** интервала $|x - x_0| \leqslant a$. Следовательно, **решение, проходящее через точку** (x_0, y_0, z_0), **будет определено и непрерывно дифференцируемо в точке** $x = x^*$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = x + \sin y. \tag{40}$$

Частная производная по y от правой части этого уравнения существует и ограничена на всей плоскости (x, y), ибо

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |\cos y| \leqslant 1, \tag{41}$$

так что условие Липшица выполнено на всей плоскости, причем $L = 1$. Следовательно, решение с любыми начальными данными $y = y_0$, $x = x_0$ будет непрерывно при любом x и может быть получено по методу Пикара.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y' = |y|. \tag{42}$$

Здесь правая часть тоже удовлетворяет условию Липшица на всей плоскости, причем $L = 1$ (см. стр. 229), хотя в точках оси Ox частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ не существует. Поэтому уравнение (42) имеет решение, проходящее через любую точку (x_0, y_0), и это решение определено и непрерывно при всех значениях x.

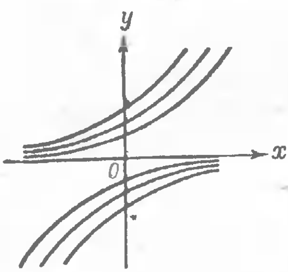


Рис. 35

В этом легко убедиться и непосредственно. Действительно, переписав наше уравнение в виде

$$\left.\begin{aligned} y' &= y \quad \text{при} \quad y \geqslant 0, \\ y' &= -y \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

и, интегрируя, найдем, что формулы:

$$\left.\begin{aligned} y &= Ce^{x}, \quad C \geqslant 0, \\ y &= Ce^{-x}, \quad C \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

дают общее решение соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, включая ось Ox (рис. 35), откуда и вытекает наше утверждение.

2. *Условие Липшица выполнено в окрестности любой точки (x_0, y_0, z_0), но не существует константы L, пригодной для произвольной области вида* (38). *В этом случае существует единственное решение* (6) *системы* (1), *удовлетворяющее начальным условиям* (2), *где x_0, y_0, z_0 любые заданные числа, иными словами, существует единственное решение, проходящее через любую заданную точку (x_0, y_0, z_0). Но существование этого решения гарантировано лишь в некоторой окрестности взятой точки $x = x_0$.*

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2. \tag{45}$$

Правая часть непрерывна при всех значениях x и y. Проверяя условие Липшица, пишем:

$$|\overline{y}^2 - \overline{\overline{y}}^2| = |\overline{y} + \overline{\overline{y}}| \cdot |\overline{y} - \overline{\overline{y}}| \leqslant L\,|\overline{y} - \overline{\overline{y}}|, \tag{46}$$

если $|\overline{y}+\overline{\overline{y}}| \leqslant L$. Нет L, пригодной для всей плоскости (x, y)*.

Следовательно, существует решение с любыми начальными данными. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Но мы не гарантируем, что оно будет определено при всех значениях x**.

Интегрируя уравнение (45), находим, что

$$y = -\frac{1}{x+C} \tag{47}$$

есть общее решение на всей плоскости (x, y).

Найдем решение (рис. 36), проходящее через точку (x_0, y_0), не лежащую на оси Ox. Соответствующим значением произвольной постоянной будет $C = -\left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)$, так что искомое решение имеет вид I:

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}, \tag{48}$$

откуда ясно, что оно обращается в бесконечность при

$$x = x_0 + \frac{1}{y_0} \equiv x^*. \tag{49}$$

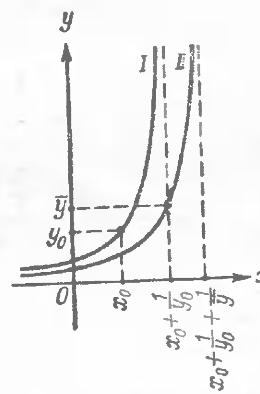


Рис. 36

Заметим, однако, что через всякую точку $\left(x_0 + \frac{1}{y_0}, \overline{y}\right)$, где $\overline{y} \neq 0$, проходит непрерывная интегральная кривая II:

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{\overline{y}}\right)}. \tag{50}$$

Но она будет иметь разрыв в точке $x = x_0 + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{\overline{y}}$, так что у каждого решения будет своя точка $x = x^*$, в которой оно перестает быть непрерывным. Эта точка определяется начальными данными решения и передвигается с изменением начальных данных (т. е. при переходе к другому решению).

Мы предполагали выше, что точка (x_0, y_0) не лежит на оси Ox, т. е. $y_0 \neq 0$. Если же мы возьмем точку $(x_0, 0)$, то через нее проходит единственная интегральная кривая $y = 0$, так что уравнение (45) имеет и такое решение, которое непрерывно при всех значениях x.

Пример 4. Пусть дано уравнение

$$y' = x + y^2 \tag{51}$$

---

* В этом можно также убедиться, исходя из частной производной $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, которая ограничена во всякой конечной области, но не ограничена на всей плоскости (x, y). Если же $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L и если существует $\frac{\partial f}{\partial y}$, то $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L$.

** Ср. п. 36, замечание 2.

с начальным условием:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0^*. \tag{52}$$

Здесь, как и в предыдущем примере, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, так что решение с любыми начальными данными существует и может быть найдено методом последовательных приближений.

Соответствующим интегральным уравнением будет

$$y = \int_0^x (x + y^2)\, dx. \tag{53}$$

Беря начальное значение искомой функции за нулевое приближение, найдем два первых приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x x\, dx = \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= \int_0^x \left(x + \frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Эти и все следующие приближения будут определены и непрерывны при всех значениях x, но сходимость последовательных приближений и, тем самым, применимость метода последовательных приближений для приближенного интегрирования уравнения (51) при начальном условии (52) гарантируется лишь в некоторой окрестности точки $x = 0$. Определим эту окрестность.

Очевидно, что в нашем случае числа a и b мы можем брать любыми. При этом

$$M = \max|x + y^2| = a + b^2.$$

Поэтому область существования решения, определяемого методом последовательных приближений, дается формулой

$$|x| < \min\left(a, \frac{b}{a + b^2}\right), \tag{55}$$

из которой видно, что для области существования решения мы не можем получить сколь угодно большого интервала, хотя правая часть данного уравнения определена и непрерывна при всех значениях x и y. Заметим, что здесь нет константы Липшица, пригодной для всей плоскости (x, y). Решения, определенного для всех значений x, и не существует.

З а м е ч а н и е. Иногда, в силу физических или геометрических соображений, уравнения рассматриваются не во всей области существования правых частей, а лишь в ее части. В таких случаях интервал сходимости последовательных приближений определяется формулой $|x - x_0| \leqslant h$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Так, если рассматривать уравнение (51) с начальным условием в квадрате $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, то сходимость последовательных приближений будет обеспечена по крайней мере на интервале $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

---

* См.: В. И. С м и р н о в. Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 158—159.

125. О продолжении решения, определяемого теоремой Пикара. Решение $y = y(x)$, $z = z(x)$, найденное в теореме Пикара п. **120**, определено и непрерывно дифференцируемо в промежутке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Если $h < a$, то это решение, вообще говоря, можно *продолжить*, т. е. можно найти такие функции $y = \bar{y}(x)$ и $z = \bar{z}(x)$, определенные и непрерывно дифференцируемые в некотором интервале, содержащем внутри себя интервал $|x - x_0| \leqslant h$, которые удовлетворяли бы системе дифференциальных уравнений (1) и совпадали бы с функциями $y = y(x)$, $z = z(x)$ во всех точках интервала $|x - x_0| \leqslant h$.

Продолжение решения $y = y(x)$, $z = z(x)$ вправо от точки $x = x_0 + h$ производится так. Предположим, что в точке $x = x_0 + h$ решение $y = y(x)$, $z = z(x)$ не достигает границы области R, т. е.

$$|y(x_0+h) - y_0| < b, \quad |z(x_0+h) - z_0| < b. \tag{56}$$

[Если вместо неравенств (56) выполняется хоть одно из равенств $|y(x_0+h) - y_0| = b$, $|z(x_0+h) - z_0| = b$, то продолжение решения, вообще говоря, невозможно.] Возьмем точку $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, где

$$x^{(1)} = x_0 + h, \quad y^{(1)} = y(x_0+h), \quad z^{(1)} = z(x_0+h), \tag{57}$$

и построим область

$$R^{(1)}: \quad |x - x^{(1)}| \leqslant a^{(1)}, \ |y - y^{(1)}| \leqslant b^{(1)}, \quad |z - z^{(1)}| \leqslant b^{(1)}, \tag{58}$$

причем:

$$\left.\begin{aligned} &a^{(1)} = a - h, \\ &b^{(1)} = \min\,[y_0 + b - y^{(1)},\ y^{(1)} - (y_0 - b),\ z_0 + b - z^{(1)},\ z^{(1)} - (z_0 - b)]. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Область $R^{(1)}$ лежит внутри области R. Следовательно, в ней выполнены оба условия теоремы Пикара. Поэтому система (1) имеет единственное решение

$$y = \tilde{y}(x), \qquad z = \tilde{z}(x), \tag{60}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y^{(1)}, \quad z = z^{(1)} \quad \text{при} \quad x = x^{(1)}, \tag{61}$$

определенное и непрерывно дифференцируемое в промежутке

$$|x - x^{(1)}| \leqslant h^{(1)}, \quad \text{где} \ h^{(1)} = \min\left(a^{(1)}, \frac{b^{(1)}}{M}\right). \tag{62}$$

В силу теоремы единственности решение (60) совпадает с решением $y = y(x)$, $z = z(x)$ в интервале $x^{(1)} - h^{(1)} \leqslant x \leqslant x^{(1)}$. Но оно определено и справа от точки $x = x^{(1)}$, в промежутке

$x^{(1)} \leqslant x \leqslant x^{(1)} + h^{(1)}$. Мы будем называть решение (60) *непосредственным продолжением решения* $y = y(x)$, $z = z(x)$ *из интервала* $|x - x_0| \leqslant h$ *в интервал* $|x - x^{(1)}| \leqslant h^{(1)}$ *через их общую часть* $[x^{(1)} - h^{(1)}, x^{(1)}]$.

Если решение (60) не достигает границы области R, то аналогично предыдущему строится его непосредственное продолжение и т. д. Можно доказать, что, *продолжая этот процесс, мы после конечного числа шагов либо убедимся, что имеет место хотя бы одно из равенств*

$$\lim_{x \to x_0 + a'} y(x) = y_0 \mp b, \qquad \lim_{x \to x_0 + a'} z(x) = z_0 \mp b, \tag{63}$$

где $a' < a$, так что решение достигает границы области R при значении x, меньшем чем $x_0 + a$, и тогда дальнейшее продолжение решения окажется, вообще говоря, невозможным, либо решение продолжимо до значения x, сколь угодно близкого к правой границе интервала $|x - x_0| \leqslant a$*.

Продолжение решения влево от точки $x = x_0 - h$ производится аналогично.

До сих пор речь шла о продолжении решения, определяемого теоремой Пикара в случае конечной области R. *Если область R не ограничена по всем переменным и условие Липшица выполняется в окрестности каждой точки, но нет константы L, пригодной для всей области R, то при продолжении решения мы встречаемся с одной из двух возможностей:*

1) *решение, найденное по методу Пикара, неограниченно продолжимо;*

2) *в результате продолжения решения, найденного по методу Пикара, мы получаем решение, в котором $y^2 + z^2 \to +\infty$, когда x стремится к некоторому конечному числу x^*.* Ясно, что в этом случае решение, определяемое теоремой Пикара, не продолжимо вправо от точки $x = x_*^{**}$.

Пример 1. В качестве иллюстрации первой из указанных возможностей, рассмотрим решение уравнения

$$y' = x \sin y \tag{64}$$

с начальным условием:

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{65}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y$, $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leqslant L$, если $|x| \leqslant L$, так что условие Липшица выполняется в окрестности любой точки плоскости (x, y), но нет постоянной L, пригодной **для всей плоскости** (x, y).

---

* Доказательство этого утверждения в случае уравнения $y' = f(x, y)$ см. в кн.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 1953, стр. 64—65.

** См.: Н. П. Еругин. О продолжении решений дифференциальных уравнений. «Прикладная математика и механика», т. XV, 1951, стр. 55—58.

Интегрируя уравнение (64), получаем $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Удовлетворяя начальному условию (65), находим $C = 1$. Следовательно, рассматриваемое решение имеет вид

$$y = 2\operatorname{arctg} e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{66}$$

Это решение определено при всех значениях x.

Следовательно, решение уравнения (64) с начальным условием (65), определяемое теоремой Пикара, продолжимо на все значения x.

Пример 2. В качестве иллюстрации второй возможности, рассмотрим решение уравнения (45),

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

с начальным условием:

$$y = y_0\ (> 0) \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{67}$$

Здесь, как показано выше, тоже нет постоянной L, пригодной для всей плоскости (x, y). Рассматриваемое решение имеет вид (48):

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}.$$

Это решение определено и непрерывно в интервале $-\infty < x < x_*$, где

$$x_* = x_0 + \frac{1}{y_0}. \tag{68}$$

Здесь $y \to +\infty$ при $x \to x_*$. (Строго говоря, надо писать $x \to x_* - 0$, так как здесь имеется в виду предел слева). Решение (48) имеет вертикальную асимптоту $x = x_*$ (положение которой, как мы видим, определяется начальными данными решения). Следовательно, решение уравнения (45) с начальным условием (67), найденное по методу Пикара, не продолжимо на все значения x: **оно не продолжимо** правее точки $x = x_*$. Влево это решение продолжимо неограниченно.

Пример 3. Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \tag{69}$$

с начальным условием:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{70}$$

Интегрируя уравнение (69), имеем:

$$\operatorname{arctg} y = x + C \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}\right). \tag{71}$$

Отсюда следует, что рассматриваемое решение имеет вид

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{72}$$

Оно имеет, очевидно, две вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 37). Следовательно, решение уравнения (69) с начальным условием

(70), найденное по методу Пикара, будет непродолжимо левее точки $x = -\frac{\pi}{2}$ и правее точки $x = \frac{\pi}{2}$.

126. Теорема Пикара для линейной системы дифференциальных уравнений. Пусть дана линейная система n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)\, y_1 + p_{12}(x)\, y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\, y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)\, y_1 + p_{22}(x)\, y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\, y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)\, y_1 + p_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\, y_n + f_n(x). \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Теорема. *Если коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ и функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в интервале $[a, b]$, то система (73) имеет единственное решение:*

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ \ldots, \quad y_n = y_n(x), \quad (74)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ y_2 = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (75)$$

где $x = x_0$ — любая заданная точка интервала $[a, b]$, а начальные значения искомых функций $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $\ldots$, $y_n^{(0)}$ — произвольные заданные числа. Решение (74) определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале $[a, b]$, т. е. во всей области непрерывности функций p_{kl} и $f_k(x)$.*

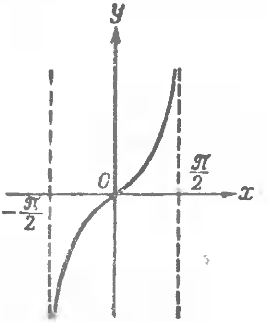


Рис. 37

Докажем эту теорему для $n = 2$.

Рассмотрим систему.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p_{11}(x)\, y + p_{12}(x)\, z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= p_{21}(x)\, y + p_{22}(x)\, z + f_2(x). \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Предположим, что коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ и функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ непрерывны в интервале $[a, b]$.

Докажем, что система (76) имеет единственное решение

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad (77)$$

* Для одного линейного уравнения первого порядка мы это уже показали в п. **36**.

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{78}$$

где x_0, y_0, z_0 — заданные числа, причем начальное значение независимой переменной x_0 принадлежит интервалу $[a, b]$, а начальные значения искомых функций y_0 и z_0 можно брать любыми, и, что это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале $[a, b]$.

Для этого заметим сначала, что при сделанном предположении правые части системы (76) непрерывны в области

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad |y| < +\infty, \quad |z| < +\infty \tag{79}$$

и удовлетворяют в этой области условию Липшица относительно y и z, причем существует константа Липшица L одна и та же для всей бесконечной области (79), ибо правые части системы (76) имеют ограниченные в области (79), частные производные по y и z. В самом деле, эти частные производные равны коэффициентам $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$, а, последние, будучи непрерывными в замкнутом интервале $[a, b]$, ограничены в этом интервале, так что вышеуказанные частные производные существуют и ограничены во всей области (79).

Пусть теперь $x = x_0$ есть любая точка интервала $[a, b]$. Если эта точка лежит на конце интервала $[a, b]$, т. е. $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то, на основании п.п. **122** и **123**, система (76) имеет единственное решение (77), удовлетворяющее начальным условиям (78), определенное и непрерывно дифференцируемое во всем интервале $[a, b]$, так что наше утверждение в рассматриваемом случае доказано. Если же точка $x = x_0$ лежит внутри интервала $[a, b]$, т. е. $a < x_0 < b$, то в каждом из интервалов $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$ система (76) имеет единственное решение (77), удовлетворяющее начальным условиям (78). Объединяя эти решения, мы получим единственное решение системы (76), удовлетворяющее начальным условиям (78), определенное и непрерывно дифференцируемое во всем интервале $[a, b]$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, сходящимся во всем интервале $[a, b]$. Таким образом наше утверждение доказано полностью.

Замечание 1. *Если коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ и функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ непрерывны в открытом интервале (a, b), то система* (76) *имеет единственное решение* (77), *удовлетворяющее начальным условиям* (78), *где $x = x_0$ — любая точка из интервала (a, b), а начальные значения y_0 и z_0 можно брать любыми. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем открытом интервале (a, b).*

В самом деле, взяв замкнутый интервал $[a + \delta, b - \delta]$, мы окажемся в условиях только что доказанной теоремы, откуда в силу произвольности δ и вытекает доказываемое утверждение.

Замечание 2. *Если коэффициенты* $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ *и функции* $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ *непрерывны при всех значениях* x (например, если они постоянны или же представляют собою полиномы от x или функции типа e^x, $\sin x$, $\cos x$ и т. п.), *то система* (76) *будет иметь единственное решение* (77), *удовлетворяющее начальным условиям* (78), *где, как начальное значение аргумента,* x_0, *так и начальные значения искомых функций,* y_0 *и* z_0, *можно выбирать произвольно. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо при всех значениях* x *и может быть получено по методу последовательных приближений* (т. е. последовательные приближения сходятся к решению при всех значениях x).

Замечание 3. *Если коэффициенты* $p_{kl}(x)$ $(k = 1, 2)$ *и функции* $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ *являются дробно-рациональными функциями от* x, *т. е. имеют вид* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ — *полиномы от* x, *то решение с начальными условиями* $y = y_0$, $z = z_0$ *при* $x = x_0$, *где все* $Q(x_0) \neq 0$, *а* y_0 *и* z_0 — *произвольные числа, будет определено и непрерывно дифференцируемо до ближайшего вещественного корня уравнений* $Q(x) = 0$.

Замечание 4. Мы доказали теорему Пикара для линейной системы уравнений в случаях замкнутого и открытого интервалов изменения x. Аналогично формулируется и доказывается теорема Пикара для линейной системы в случаях интервалов вида $[a, b)$ и $(a, b]$.

Таким образом, *решение линейной системы дифференциальных уравнений* (76) *с любыми начальными значениями искомых функций существует и непрерывно дифференцируемо и единственно всюду, где коэффициенты* $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ *и функции* $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ *непрерывны.*

В этом состоит одно из замечательных свойств линейных систем. Нелинейные системы этим свойством, вообще говоря, не обладают.

Основываясь на указанном свойстве, можно строить приближенное решение линейной системы с любыми начальными значениями искомых функций при начальном значении независимой переменной из интервала непрерывности коэффициентов системы (76) и функций $f_k(x)$, ибо во всем этом интервале существование и единственность искомого решения обеспечено.

Пример 1. Найти решение линейной системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z, \end{aligned}\right| \tag{80}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1, \quad z = -1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{81}$$

Согласно теореме Пикара, искомое решение существует, непрерывно дифференцируемо при всех значениях x и может быть найдено по методу Пикара. Имеем:

$$y = 1 + \int_0^x (5y + 4z)\, dx, \quad z = -1 + \int_0^x (4y + 5z)\, dx; \tag{82}$$

$$y_0(x) = 1, \quad z_0(x) = -1;$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx = 1 + x, \quad z(x) = -1 + \int_0^x (-1)\, dx = -(1 + x);$$

$$y_2(x) = 1 \int_0^x [5(1 + x) - 4(1 + x)]\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$z_2(x) = -1 + \int_0^x [4(1 + x) - 5(1 + x)]\, dx = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right);$$

. . . .

$$y_n(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \to e^x = y,$$

$$z_n(x) = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \to -e^x = z.$$

Искомым решением будет* $y = e^x$, $z = -e^x$. Других решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям, нет.

Пример 2. Пусть дано линейное уравнение

$$y' - y = x^2 \tag{83}$$

и поставлено начальное условие:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{84}$$

Найти второе приближение по методу Пикара. Сравнить с точным решением, получаемым квадратурами.

Здесь опять искомое решение существует единственно, определено при всех значениях x и может быть найдено методом Пикара. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &y = 1 + \int_0^x (y + x^2)\, dx, \\ &y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + x^2)\, dx = 1 + x + \frac{x^3}{3}, \\ &y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4}, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

---

* Ср. п. **105**.

так что

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4}. \tag{86}$$

Точным решением уравнения (83) с начальным условием (84) будет

$$y = 3e^x - x^2 - 2x - 2. \tag{87}$$

Разлагая это решение в ряд по степеням x, имеем:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \ldots \tag{88}$$

Сравнивая (86) и (88), видим, что при малых значениях x второе приближение мало отличается от точного решения.

127. О решении однородной линейной системы с нулевыми начальными значениями искомых функций. Линейная система (73) называется *однородной*, если все функции $f_k(x)$ тождественно равны нулю в рассматриваемом интервале изменения x. Однородная линейная система имеет, следовательно, такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)\,y_1 + p_{12}(x)\,y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\,y_n,\\
\frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)\,y_1 + p_{22}(x)\,y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\,y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)\,y_1 + p_{n2}(x)\,y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\,y_n.
\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Здесь правые части представляют собою однородные линейные функции относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Предположим, что коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в некотором интервале (a, b). Пусть требуется найти решение системы (89) *с нулевыми начальными значениями искомых функций*, т. е. решение с начальными условиями:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \; \ldots, \; y_n = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \in (a, b)^*. \tag{90}$$

Очевидно, что искомым решением будет

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 \equiv 0, \; \ldots, \; y_n \equiv 0 \quad (a < x < b), \tag{91}$$

в котором все неизвестные функции тождественно равны нулю во всем интервале (a, b). Решение (91) будем называть *нулевым* решением. В силу теоремы единственности других решений с нулевыми начальными значениями искомых функций не существует.

Таким образом, *если относительно какого-либо решения однородной линейной системы известно, что в нем все функции* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ *принимают значение нуль*

---

* $\in$ — знак принадлежности. Запись $x_0 \in (a, b)$ означает, что число x_0 принадлежит интервалу (a, b).

*в некоторой точке $x = x_0$ из интервала непрерывности коэффициентов системы, то это решение есть нулевое**.

Это свойство решений однородной линейной системы мы используем в дальнейшем при построении общей теории линейных систем. Для одного однородного линейного уравнения мы уже отметили это свойство в п. **32**.

Дадим еще механическое истолкование рассматриваемого свойства. Пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)\ x_1 + p_{12}(t)\ x_2 + \ldots + p_{1n}(t)\ x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(t)\ x_1 + p_{22}(t)\ x_2 + \ldots + p_{2n}(t)\ x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}(t)\ x_1 + p_{n2}(t)\ x_2 + \ldots + p_{nn}(t)\ x_n, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты движущейся точки, t — время, $p_{kl}(t)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ — непрерывные функции t при $a<t<b$. Тогда *единственным движением с начальными условиями:*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0 \quad \textit{при} \quad t = t_0 \in (a, b) \tag{93}$$

*является состояние покоя***

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \ \ldots, \ x_n \equiv 0 \quad (a < t < b). \tag{94}$$

128. Теорема Пикара для уравнения n-го порядка. Пусть дано уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{95}$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{n-1} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{96}$$

В п. **112** мы показали, что нахождение решения уравнения (95), удовлетворяющего начальным условиям (96), приводится путем введения неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots y_n$:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \ \ldots, \ y_n = y^{(n-1)} \tag{97}$$

---

* Здесь, как и везде в этой книге, имеется в виду, что $x_0 \neq \mp\infty$. Не исключена возможность существования ненулевого решения, принимающего нулевые значения в бесконечно удаленной точке, если функции $p_{kl}(x)$ определены и непрерывны при всех значениях x.

** Это, однако, не исключает возможности существования движений, стремящихся к состоянию покоя при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, если, конечно, функции $p_{kl}(t)$ определены и непрерывны при всех значениях t.

к нахождению решения нормальной системы n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f(x,\ y_1,\ y_2\ \ldots,\ y_n), \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1 = y_0, \quad y_2 = y_0', \ \ldots,\ y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{99}$$

Поэтому для уравнения (95) имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема Пикара. *Предположим, что правая часть уравнения* (95) *удовлетворяет в области*

$$R\colon\ |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |y' - y_0'| \leqslant b,\ \ldots, \\ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leqslant b, \tag{100}$$

где a и b — положительные числа, двум условиям:

I) *функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по всем своим аргументам и, следовательно, ограничена, т. е.*

$$|f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \leqslant M, \tag{101}$$

где $(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \in R$, а M — постоянное положительное число;

II) *функция $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ удовлетворяет условию Липшица относительно переменных $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, т. е.*

$$|f(x, \bar{y},\ \bar{y}',\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-1)}) - f(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\ \ldots,\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)})| \leqslant \\ \leqslant L\,(|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + |\bar{y}' - \bar{\bar{y}}'| + \ldots + |\bar{y}^{(n-1)} - \bar{\bar{y}}^{(n-1)}|), \tag{102}$$

где $(x,\ \bar{y},\ \bar{y}',\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-1)})$ и $(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\ \ldots,\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)})$ — любые две точки области R, а L — постоянное положительное число.*

Тогда существует единственное решение

$$y = y(x), \tag{103}$$

удовлетворяющее начальным условиям (96), *определенное и не-*

* *Условие Липшица, в частности, будет выполнено, если существуют ограниченные в области R частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial y'},\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$* (ср. замечание в п. **119**).

прерывное вместе со своими производными до n-го порядка включительно в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{104}$$

где

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_{R}(M, |y'|, \ldots, |y^{(n-1)}|)}\right\}.$$

Из этой теоремы вытекает справедливость теоремы Пикара для уравнения (95) в упрощенной формулировке, приведенной в п. 86, где условие Липшица заменено более сильным требованием ограниченности частных производных $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$.

Утверждения, доказанные в пп. **122—125**, переносятся с соответствующими изменениями и на случай уравнения (95).

129. Теорема Пикара для линейного уравнения n-го порядка. Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x). \tag{105}$$

Введением неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам (97) это уравнение приводится к следующей л и н е й н о й системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = -p_1(x)\, y_n - p_2(x)\, y_{n-1} - \ldots - \\ &\qquad - p_{n-1}(x)\, y_2 - p_n(x)\, y_1 + f(x). \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Из теоремы Пикара для системы (106) вытекает следующая теорема существования и единственности для линейного уравнения (105).

Т е о р е м а П и к а р а. *Если в уравнении* (105) *все коэффициенты* $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ *и функция* $f(x)$ *непрерывны в интервале* $[a, b]$, *то оно имеет единственное решение*

$$y = y(x), \tag{107}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{108}$$

где x_0 *принадлежит интервалу* $[a, b]$, *а* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *л ю б ы е заданные числа.*

Это решение определено и непрерывно вместе со своими производными до n-го порядка включительно во всем интервале $[a, b]$, т. е. во всем интервале непрерывности коэффициентов уравнения (105) *и функции* $f(x)$.

Замечание. *Все замечания к теореме Пикара для линейной системы, сделанные в* п. **126**, *переносятся с соответствующими изменениями и на случай линейного уравнения n-го порядка. В частности, если $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях x, то существует единственное решение, удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям, т. е. все числа $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ можно брать любыми. Это решение будет определено и непрерывно вместе со своими производными до n-го порядка включительно при всех значениях x, и может быть найдено методом последовательных приближений.*

130. О решении однородного линейного уравнения n-го порядка с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных. Если в линейном уравнении (105) функция $f(x)$ тождественно равна нулю в рассматриваемом интервале изменения x, то оно называется *однородным* и имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0. \qquad (109)$$

Здесь левая часть есть однородная линейная функция первой степени относительно искомой функции y и всех ее производных.

К уравнению (109) применима доказанная выше теорема существования и единственности.

В частности, *единственным решением с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных, т. е. решением, удовлетворяющим начальным условиям:*

$$y = 0,\ y' = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \qquad (110)$$

где $x = x_0$ — любая точка из интервала непрерывности коэффициентов уравнения (109), *является нулевое решение:*

$$y \equiv 0. \qquad (111)$$

Действительно, нулевое решение удовлетворяет начальным условиям (110), а в силу теоремы единственности других решений, удовлетворяющих этим же начальным условиям, быть не может.

Из доказанного следует, что если относительно какого-либо решения однородного линейного уравнения n-го порядка известно, что оно в какой-либо точке, лежащей в интервале непрерывности коэффициентов уравнения, обращается в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, то это решение есть нулевое. Этим свойством решения однородного линейного уравнения мы воспользуемся при построении общей теории линейных уравнений n-го порядка.

Геометрически в случае $n = 1$ это свойство означает, что ненулевое решение однородного линейного уравнения первого порядка $y' + p(x)y = 0$ не может иметь общей точки с осью Ox на интервале непрерывности коэффициента $p(x)$ (что уже отмечено нами в п. 32). В случае $n = 2$ оно означает, что ненулевое решение однородного линейного уравнения второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не может касаться оси Ox на интервале непрерывности коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$. В самом деле, в точке касания мы имели бы $y = 0$, $y' = 0$, а тогда $y \equiv 0$ во всем интервале непрерывности $p(x)$ и $q(x)$.

С механической точки зрения рассматриваемое свойство может быть истолковано так. Предположим, что дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки по оси Ox имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0, \tag{112}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ суть функции от t, непрерывные в некотором интервале. Тогда *единственным движением с нулевыми начальными значениями положения и скорости точки, т. е. движением с начальными условиями:*

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{113}$$

где начальный момент времени $t = t_0$ лежит в интервале непрерывности коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$, будет состояние покоя

$$x \equiv 0. \tag{114}$$

§ 2. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЯ КАК ФУНКЦИИ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА

131. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от параметров. В предыдущих параграфах мы считали начальные данные решения фиксированными и изучали решение как функцию независимой переменной. Будем теперь изменять начальные данные. Первый вопрос, который при этом возникает,— это вопрос о том, будет ли малому изменению начальных данных соответствовать малое же изменение решения. Этот вопрос исключительно важен не только для самой теории дифференциальных уравнений, но и для ее приложений. Дело в том, что в задачах прикладного характера начальные данные находятся измерением. Но за абсолютную точность измерения ручаться нельзя. Поэтому нам важно быть уверенными в том, что небольшие погрешности в измерении начальных данных не приведут к сильному изменению решения. Мы покажем, что **при соблюдении условий теоремы Пикара решение будет зависеть непрерывным образом от начальных данных, а при дополнительных предположениях оно будет даже дифференцируемо по начальным данным.** Но прежде чем это доказать, мы исследуем более общий вопрос о зависимости решения от параметров, имеющий и самостоятельное значение как для теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений.

Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

правые части которой определены как функции независимой переменной x и искомых функций $y_1, \ldots, y_n$ в области

$$R: |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant b, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b \tag{2'}$$

с центром в заданной точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ и как функции параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области

$$\lambda_1^{(0)} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^{(1)}, \ \ldots, \ \lambda_m^{(0)} \leqslant \lambda_m \leqslant \lambda_m^{(1)}. \tag{3'}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что правые части системы* (1′) *удовлетворяют следующим двум условиям:*

I. *Функции f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны относительно $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области* (2′), (3′) *и, следовательно, ограничены, т. е.*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \leqslant M, \tag{4'}$$

где $(x, y_1, \ldots, y_n)$ — любая точка области (2′), *$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — любая точка области* (3′), *а M — постоянное положительное число, не зависящее от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.*

II. *Функции f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию Липшица относительно искомых функций $y_1, \ldots, y_n$, т. е.*

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \leqslant L \sum_{l=1}^{n} |\bar{y}_l - \bar{\bar{y}}_l|, \tag{5'}$$

где $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ *и* $(x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n)$ — *любые точки из области* $(2')$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — *любая точка области* $(3')$, *а* L — *постоянное положительное число, не зависящее от параметров* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Тогда система $(1')$, *имеет единственное решение:*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ y_2 = y_2(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = y_n(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \end{array}\right\} \tag{6'}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{7}$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо как функция от независимой переменной x *в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{8'}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{9'}$$

определено и непрерывно как функция от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *во всей области* $(3')$, *равномерно относительно независимой переменной* x *из интервала* $(8')$, *т. е. для каждого положительного числа* ε *найдется такое положительное число* δ, *что* ***одновременно*** *для всех* x *из интервала* $(8')$ *выполняются неравенства*

$$|y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \ldots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| < \varepsilon$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

лишь только $|\Delta\lambda_1| < \delta, \ldots, |\Delta\lambda_m| < \delta$.

Докажем эту теорему для случая $n = 2$, $m = 1$. В общем случае доказательство проводится аналогично.

Итак, рассмотрим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \lambda), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \lambda), \end{array}\right\} \tag{1}$$

правые части которой суть функции от x, y, z, и от параметра λ.

Предположим, что функции $f_1(x, y, z, \lambda)$ *и* $f_2(x, y, z, \lambda)$ *удовлетворяют в области*

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |z - z_0| \leqslant b \tag{2}$$

изменения переменных x, y, z *и в интервале*

$$\lambda^{(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(1)} \tag{3}$$

изменения параметра λ *следующим двум условиям:*

I. Функции $f_1(x, y, z, \lambda)$ и $f_2(x, y, z, \lambda)$ непрерывны по x, y, z, λ в области (2), (3) *и, следовательно, ограничены:*

$$|f_k(x, y, z, \lambda)| \leqslant M \quad (k = 1, 2), \tag{4}$$

причем число M не зависит от параметра λ.

II. Функции $f_1(x, y, z, \lambda)$ и $f_2(x, y, z, \lambda)$ удовлетворяют условию Липшица относительно y и z:

$$|f_k(x, \bar{y}, \bar{z}, \lambda) - f_k(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}, \lambda)| \leqslant L(|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + |\bar{z} - \bar{\bar{z}}|) \quad (k=1, 2), \tag{5}$$

причем число L не зависит от параметра λ.

Докажем, что *система* (1) *имеет единственное решение:*

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x, \lambda), \\ z &= z(x, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{7}$$

причем это решение определено и непрерывно дифференцируемо как функция от независимой переменной x в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{8}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{9}$$

определено и непрерывно как функция параметра λ в интервале (3), *равномерно относительно x из интервала* (8).

С этой целью мы будем поступать так же, как при доказательстве теоремы Пикара п. **120**. Нам нужно лишь внести некоторые изменения и дополнения, вызванные тем, что правые части системы (1) зависят не только от x, y, z, но и от параметра λ.

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y, z, \lambda)\, dx, \\ z &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y, z, \lambda)\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

равносильную системе (1) с начальными условиями (7) и применим для нахождения решения этой системы метод Пикара.

Беря y_0 и z_0 за нулевое приближение, строим последовательные приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \lambda)\, dx, \\ z_1(x, \lambda) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0, \lambda)\, dx; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1[x, y_1(x, \lambda), z_1(x, \lambda), \lambda]\, dx, \\ z_2(x, \lambda) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2[x, y_1(x, \lambda), z_1(x, \lambda), \lambda]\, dx; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} y_n(x, \lambda) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1[x, y_{n-1}(x, \lambda), z_{n-1}(x, \lambda), \lambda]\, dx, \\ z_n(x, \lambda) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2[x, y_{n-1}(x, \lambda), z_{n-1}(x, \lambda), \lambda]\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, мы получаем две последовательности функций

$$\left.\begin{aligned} &y_0,\ y_1(x, \lambda),\ y_2(x, \lambda),\ \ldots,\ y_n(x, \lambda),\ \ldots, \\ &z_0,\ z_1(x, \lambda),\ z_2(x, \lambda),\ \ldots,\ z_n(x, \lambda),\ \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Докажем относительно них три утверждения, аналогичные трем утверждениям относительно соответствующих им последовательностей (16) п. **120**.

1. *Все функции последовательностей* (14) *определены и непрерывны как функции от независимой переменной x в интервале* (8) *и как функции параметра λ в интервале* (3) *и не выходят при этих значениях x и λ из области R.*

В справедливости этого утверждения легко убедиться методом математической индукции.

В самом деле, из формул (11) мы видим, что функции $y_1(x, \lambda)$ и $z_1(x, \lambda)$ определены и непрерывны как функции от x в интервале $|x - x_0| \leqslant a$, и как функции от параметра λ в интервале (3), ибо $f_1(x, y_0, z_0, \lambda)$ и $f_2(x, y_0, z_0, \lambda)$ непрерывны как относительно x, так и относительно λ в указанных областях. Далее, оценивая разности $y_1(x, \lambda) - y_0$ и $z_1(x, \lambda) - z_0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &|y_1(x, \lambda) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_1(x, y_0, z_0, \lambda)|\, dx \right| \leqslant M\,|x - x_0|, \\ &|z_1(x, \lambda) - z_0| \leqslant M\,|x - x_0|. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Поэтому функции $y_1(x, \lambda)$ и $z_1(x, \lambda)$ не выйдут из области R, если $|x - x_0| \leqslant h$, $\lambda^{(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(1)}$. Таким образом, доказываемое утверждение справедливо для функций $y_1(x, \lambda)$ и $z_1(x, \lambda)$.

Предположив, что это утверждение справедливо для функций $y_{n-1}(x, \lambda)$ и $z_{n-1}(x, \lambda)$, и используя формулы (13), убеждаемся, что оно справедливо и для функций $y_n(x, \lambda)$ и $z_n(x, \lambda)$.

В самом деле, подынтегральные функции в формулах (13), рассматриваемые как сложные функции от x и λ, непрерывны в промежутках (8) и (3), так что функции $y_n(x, \lambda)$ и $z_n(x, \lambda)$ определены и непрерывны в этих интервалах. Кроме того, имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned} &|y_n(x, \lambda) - y_0| \leqslant b, \\ &|z_n(x, \lambda) - z_0| \leqslant b \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

при $|x - x_0| \leqslant h$, $\lambda^{(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(1)}$.

Из приведенных рассуждений и вытекает справедливость доказываемого утверждения для всех функций последовательностей (14).

2. *Последовательности* (14) *равномерно сходятся относительно независимой переменной x в интервале* (8) *и относительно параметра λ в интервале* (3), *и, следовательно, предельные функции непрерывны относительно независимой переменной x в интервале* (8) *и относительно параметра λ в интервале* (3).

В самом деле, для членов рядов:

$$\left.\begin{aligned} &y_0 + [y_1(x, \lambda) - y_0] + [y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)] + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + [y_n(x, \lambda) - y_{n-1}(x, \lambda)] + \ldots, \\ &z_0 + [z_1(x, \lambda) - z_0] + [z_2(x, \lambda) - z_1(x, \lambda)] + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + [z_n(x, \lambda) - z_{n-1}(x, \lambda)] + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

соответствующих последовательности (14), мы, так же как и в п. **120** получим оценки:

$$\left.\begin{aligned} &|y_n(x, \lambda) - y_{n-1}(x, \lambda)| \leqslant M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \\ &|z_n(x, \lambda) - z_{n-1}(x, \lambda)| \leqslant M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

справедливые для всех значений x и λ соответственно из интервалов (8) и (3). Поэтому ряды (17) сходятся р а в н о м е р н о относительно x в интервале (8) и относительно λ в интервале (3).

Обозначим суммы рядов (17) или, что то же, п р е д е л ь н ы е ф у н к ц и и последовательностей (14) через $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$. В силу только что доказанной равномерной сходимости рядов (17) и доказанной выше непрерывности членов этих рядов функции $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ непрерывны относительно x в интервале (8) и относительно λ в интервале (3).

3. *Предельные функции $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ не выходят из области R, когда x и λ изменяются соответственно в интервалах* (8) *и* (3) *и удовлетворяют системе интегральных уравнений* (10).

Чтобы убедиться в этом достаточно перейти к пределу в неравенствах (16) при $n \to \infty$ и в формулах (13) при $n \to \infty$, используя в последнем случае доказанную выше равномерную сходимость последовательностей (14).

Таким образом, доказано, что система (1) имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям (7), причем найденное решение является не только непрерывной функцией от x, но и от параметра λ. Это решение будет непрерывно как функция параметра λ в промежутке (3) равномерно относительно x из интервала (8).

Так же, как и в п. **120**, можно доказать единственность найденного решения.

Кроме того, из самой системы (1) вытекает, что найденное решение будет иметь производную по x, непрерывную относительно x в интервале (8) и относительно λ в интервале (3).

Замечание 1. *Если система* (1′) *линейная, т. е. имеет вид*

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, y_l + $$
$$+ f_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{19}$$

причем все функции p_{kl} и f_k непрерывны относительно x и относительно параметров $\lambda_1 \ldots, \lambda_m$ в области $[a, b]$, (3′), *то решение* (6′), *с любыми начальными значениями искомых функций и начальным значением независимой переменной из интервала $[a, b]$, будет определено и непрерывно как функция от x во всем интервале $[a, b]$ и как функция от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области* (3′).

Это решение будет непрерывно как функция параметров $\lambda, \ldots, \lambda_m$ в области (3′) *равномерно относительно x во всем интервале* $[a, b]$. Последнее, как уже было сказано выше, означает, что по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенства

$$|y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \ldots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| < \varepsilon$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

будут выполняться одновременно для всех x из $[a, b]$, когда $|\Delta\lambda_1| < \delta, \ldots, |\Delta\lambda_m| < \delta$.

Если p_{kl} и f_k непрерывны относительно x в интервале $(-\infty, +\infty)$, то по заданному $\varepsilon > 0$ для каждого конечного интервала $[x_0 - l, x_0 + l]$ найдется свое $\delta > 0$, так что δ есть функция от l, в то время как для всего бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$ соответствующее число δ может и не существовать, т. е. решение может не быть непрерывной функцией параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равномерно относительно x во всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Для линейного уравнения первого порядка непрерывная зависимость решения от параметров вытекает непосредственно из формулы общего решения в форме Коши*.

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда не только правые части системы дифференциальных уравнений, но и начальные данные решения являются функциями параметров.

Пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и начальные условия:

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\ \text{при } x = \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m). \end{gathered} \tag{21}$$

Тогда из рассуждений теоремы настоящего пункта следует, что *если правые части системы* (20) *удовлетворяют всем условиям этой теоремы, а начальные данные суть непрерывные функции от параметров* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *в области* (3′), *причем эти функции не выходят из области* $\overline{R}$, *содержащейся внутри* R, *то существует единственное решение системы* (20) *с начальными условиями* (21) *и это решение будет непрерывной функцией от* x *в некотором интервале* $|x - x_0| \leqslant \overline{h} < h$ *и от* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *в области* (3′).

В случае линейной системы можно в качестве $\varphi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \ldots, \varphi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ брать любые непрерывные функции от параметров и решение будет определено во всем интервале непрерывности правых частей относительно независимой переменной. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если коэффициенты системы* (19) *и функции* f_k *суть непрерывные функции относительно независимой переменной* x *и относительно параметров* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *в области* $[a, b]$, (3′), *а начальные данные суть непрерывные функции от* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *в области* (3′), *причем значения, принимаемые функцией* $\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, *лежат в промежутке* $[a, b]$, *то существует единственное решение системы* (19), *удовлетворяющее начальным условиям* (21), *и это решение будет непрерывной*

---

* См. п. 36, формула (42).

функцией от x в интервале $[a, b]$ и от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области (3').

Из рассуждений теоремы настоящего пункта также следует, что, *если:* 1) *правые части системы* (20) *в области* (2'), (3') *обладают свойством:*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - f_k(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon$$

при $|x-\bar{x}| < \delta(\varepsilon)$, $|y_1-\bar{y}_1| < \delta(\varepsilon), \ldots, |y_n-\bar{y}_n| < \delta(\varepsilon)$, $|\lambda_1 - \bar{\lambda}| < \delta(\varepsilon), \ldots, |\lambda_m - \bar{\lambda}_m| < \delta(\varepsilon)$, *где* $\delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Здесь* $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ *фиксированные значения параметров из области* (3'); 2) $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *ограничены в области* (2'), (3'), *и удовлетворяют условию Липшица относительно* $y_1, \ldots, y_n$, *с константой* L, *не зависящей от* $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$; 3) *функции, входящие в начальные условия* (21), *непрерывны при* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$ *и не выходят из области* R, *то существует единственное решение системы* (20) *с начальными условиями* (21) *и это решение будет непрерывной функцией от независимой переменной* x *в интервале* $|x - x_0| \leqslant h$ *и от параметров* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *при* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$.

В частности, для линейной системы (19) справедливо следующее утверждение. *Если:* 1) *функции* p_{kl} и f_k *в области* $[a, b]$, (3') *обладают свойством*

$$|p_{kl}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - p_{kl}(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon$$

$$|f_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - f_k(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon$$

при $|x-\bar{x}| < \delta(\varepsilon)$, $|\lambda_1 - \bar{\lambda}_1| < \delta(\varepsilon), \ldots, |\lambda_m - \bar{\lambda}_m| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$; 2) *функции* p_{kl} *и* f_k *ограничены в области* $[a, b]$, (3'); 3) *функции, входящие в начальные условия* (21), *непрерывны при* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$, *причем значения функции* $x = \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *лежат в интервале* $[a, b]$, *то существует единственное решение системы* (19) *с начальными условиями* (21), *и это решение будет непрерывной функцией от* x *в интервале* $[a, b]$ *и от параметров* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *при* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$.

132. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от начальных данных. Пусть дана система уравнений:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22'}$$

правые части которой определены в области

$$R: \quad |x - x_0| \leqslant a, \qquad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant b, \ldots, |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b \tag{23'}$$

с центром в заданной точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Теорема. *Если правые части системы* (22′) *удовлетворяют в области R обоим условиям теоремы Пикара, то решение*

$$y_k = \varphi_k(x,\ x^*,\ \overset{*}{y}_1,\ \ldots,\ \overset{*}{y}_n), \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{24'}$$

с начальными условиями:

$$y_1 = \overset{*}{y}_1,\ \ldots,\ y_n = \overset{*}{y}_n \quad \text{при} \quad x = x^* \tag{25'}$$

будет непрерывной функцией от независимой переменной x и от начальных данных x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$, когда x изменяется в некоторой окрестности точки $x = x_0$, а начальные данные x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$, в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$, а именно, решение (24′) *будет непрерывной функцией от x и от x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$, когда x изменяется в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega, \tag{26'}$$

а x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$ лежат в области

$$|x^* - x_0| \leqslant \omega, \qquad |\overset{*}{y}_1 - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2},\ \ldots,\ |\overset{*}{y}_n - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \tag{27'}$$

где

$$h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right), \qquad 0 \leqslant \omega < \frac{h}{4}. \tag{28'}$$

При этом решение (24′) *будет непрерывно как функция начальных данных x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$ в области* (27′) *равномерно относительно x из интервала* (26′). Последнее означает, что для всякого положительного числа ε, найдется такое положительное число δ, что неравенства

$$|\varphi_k(x,\ x^* + \Delta x^*,\ \overset{*}{y}_1 + \Delta\overset{*}{y}_1,\ \ldots,\ \overset{*}{y}_n + \Delta\overset{*}{y}_n) -$$
$$- \varphi_k(x,\ x^*,\ \overset{*}{y}_1,\ \ldots,\ \overset{*}{y}_n)| < \varepsilon \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

будут выполняться одновременно для всех x из интервала (26′), когда $|\Delta x^*| < \delta$, $|\Delta\overset{*}{y}_1| < \delta, \ldots, |\Delta\overset{*}{y}_n| < \delta$. Здесь, конечно, δ можно выбрать независимо от выбора начальных данных x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$ из области (27′).

Докажем эту теорему для $n = 2$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Итак, рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \qquad |y - y_0| \leqslant b, \qquad |z - z_0| \leqslant b \tag{23}$$

условиям теоремы Пикара.

Докажем, что *решение:*

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ z &= \psi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

с начальными условиями

$$y = y^*,\ z = z^* \quad \text{при} \quad x = x^* \tag{25}$$

будет непрерывной функцией от x и от x^*, y^*, z^*, когда x изменяется в интервале

$$|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega, \tag{26}$$

а x^*, y^*, z^* — в области

$$|x^* - x_0| \leqslant \omega, \qquad |y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \qquad |z^* - z_0| \leqslant \frac{b}{2}, \tag{27}$$

где

$$h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right), \qquad 0 \leqslant \omega < \frac{h}{4}, \tag{28}$$

причем решение (24) *будет непрерывно как функция начальных данных x^*, y^*, z^* в области* (27) *равномерно относительно независимой переменной x из интервала* (26).

С этой целью сделаем замену независимой переменной и искомых функций по формулам:

$$x - x^* = \xi, \qquad y - y^* = \eta, \qquad z - z^* = \zeta. \tag{29}$$

Тогда система (22) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= f_1(\xi + x^*,\ \eta + y^*,\ \zeta + z^*) \equiv \overline{f_1}(\xi,\ \eta,\ \zeta;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ \frac{d\zeta}{d\xi} &= f_2(\xi + x^*,\ \eta + y^*,\ \zeta + z^*) \equiv \overline{f_2}(\xi,\ \eta,\ \zeta;\ x^*,\ y^*,\ z^*). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Начальные условия (25) заменятся новыми начальными условиями:

$$\eta = 0, \qquad \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \tag{31}$$

Согласно сделанному выше предположению, правые части системы (30) удовлетворяют условиям теоремы Пикара относительно переменных ξ, η, ζ в области

$$\left.\begin{aligned} |\xi + x^* - x_0| &\leqslant a, \\ |\eta + y^* - y_0| &\leqslant b, \\ |\zeta + z^* - z_0| &\leqslant b \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

и содержат x^*, y^* и z^* в качестве параметров.

Заметим, что неравенства (32) будут выполняться, если, например, считать, что ξ, η, ζ изменяются в области

$$|\xi| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |\eta| \leqslant \frac{b}{2}, \quad |\zeta| \leqslant \frac{b}{2}, \tag{33}$$

а параметры x^*, y^*, z^* — в области

$$|x^* - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \quad |z^* - z_0| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{34}$$

В самом деле, при этих условиях мы будем иметь:

$$|\xi + x^* - x_0| \leqslant |\xi| + |x^* - x_0| \leqslant \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,$$

$$|\eta + y^* - y_0| \leqslant |\eta| + |y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

$$|\zeta + z^* - z_0| \leqslant |\xi| + |z^* - z_0| \leqslant \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Следовательно, правые части системы (30) удовлетворяют всем условиям теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров, когда ξ, η, ζ и x^*, y^*, z^* изменяются соответственно в областях (33) и (34).

Поэтому система (30) имеет единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta(\xi;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ \zeta &= \zeta(\xi;\ x^*,\ y^*,\ z^*) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

с начальными условиями (31), определенное и непрерывное как функция от независимой переменной ξ и параметров x^*, y^*, z^*, когда ξ изменяется в интервале

$$|\xi| \leqslant \frac{h}{2}, \tag{36}$$

а x^*, y^*, z^* — в области (34),

$$|x^* - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \quad |z^* - z_0| \leqslant \frac{b}{2}.$$

При этом решение (35) непрерывно как функция параметров x^*, y^*, z^* равномерно относительно независимой переменной ξ в интервале (36).

Возвращаясь в формулах (35) к старым переменным x, y, z, получим (24)

$$y = y^* + \eta(x - x^*,\ x^*,\ y^*,\ z^*) \equiv \varphi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*),$$
$$z = z^* + \zeta(x - x^*,\ x^*,\ y^*,\ z^*) \equiv \psi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*).$$

Это есть решение системы (22) с начальными условиями (25). Из (36) вытекает, что оно определено как функция независимой переменной x в области

$$|x-x^*| \leqslant \frac{h}{2}. \tag{36}$$

Последнее неравенство будет, например, выполнено, если считать, что независимая переменная x изменяется в окрестности точки $x = x_0$, определяемой неравенством (26),

$$|x-x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega,$$

а начальное значение x^* отличается от x_0 по абсолютной величине не больше, чем на ω:

$$|x^*-x_0| \leqslant \omega. \tag{37}$$

Действительно, мы будем иметь тогда, что

$$|x-x^*| = |x-x_0+x_0-x^*| \leqslant |x-x_0| + |x^*-x_0| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h}{2} - \omega + \omega = \frac{h}{2}.$$

Следовательно, решение (24) будет непрерывной функцией от x и от начальных данных x^*, y^*, z^*, когда x изменяется в интервале (26), а x^*, y^*, z^* — в области (27). При этом решение (24) будет непрерывной функцией от x^*, y^*, z^* в области (27), равномерно относительно x из интервала (26).

З а м е ч а н и е. *Если система* (22′) — *л и н е й н а я, т. е. имеет вид*

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22″}$$

причем все $p_{kl}(x)$ *и* $f_k(x)$ *непрерывны в интервале* $|x-x_0| \leqslant a$, *то решение* (24′) *с начальными условиями* (25′) *будет непрерывной функцией от* x *в интервале*

$$|x-x_0| \leqslant \frac{a}{2} - \omega, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \omega < \frac{a}{4}, \tag{26″}$$

и начальных данных x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$ *в области*

$$|x^*-x_0| \leqslant \omega,\ |\overset{*}{y}_1| < +\infty,\ \ldots,\ |\overset{*}{y}_n| < +\infty, \tag{27″}$$

причем решение (24′) *есть непрерывная функция от* x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$ *в области* (27″), *равномерно относительно* x *из интервала* (26″)*.

---

* Однако, в отличие от случая, рассмотренного в доказанной выше теореме, здесь нет гарантии, что δ можно выбрать независимо от выбора начальных данных x^*, $\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_n$.

Для линейного уравнения первого порядка непрерывная зависимость решения от начальных данных вытекает непосредственно из формулы общего решения в форме Коши.

Замечание. Можно показать, что *для решений систем дифференциальных уравнений вида* (22), *правые части которых непрерывны и ограничены в некоторой области D, непрерывная зависимость решений от начальных данных вытекает из единственности решения задачи Коши с любыми начальными данными из области D**.

Более полное исследование вопроса о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных содержится в работе А. Ф. Андреева и Ю. С. Богданова**.

133. Понятие об устойчивости решения (движения) в смысле Ляпунова***. Если правые части системы (22′) определены и непрерывны лишь в конечном (замкнутом) промежутке изменения независимой переменной x, то из предыдущего пункта следует, что при выполнении условий теоремы Пикара, любые два решения, имеющие достаточно близкие начальные значения, будут сколь угодно близки между собою в некотором конечном интервале изменения x.

Если же правые части системы (22′) определены и непрерывны при всех значениях $x \geqslant x_0$, то в случае, когда какие-либо два решения системы также определены при всех значениях $x \geqslant x_0$, возникает вопрос: можем ли мы гарантировать наперед заданную близость этих решений при всех значениях независимой переменной, бо́льших начального значения последней, если взять начальные значения искомых функций достаточно близкими?

Рассмотрим некоторое решение системы (22′) и будем сравнивать его со всеми другими решениями, имеющими начальные значения, близкие к начальным значениям рассматриваемого решения. Если при этом окажется, что рассматриваемое решение таково, что все другие решения, имеющие начальные значения, достаточно близкие к начальным значениям рассматриваемого решения, будут сколь угодно близки к нему при всех $x \geqslant x_0$, то оно называется устойчивым в смысле Ляпунова.

---

* См.: И. Г. Петровский. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Гостехиздат, 1952, стр. 77.

** А. Ф. Андреев и Ю. С. Богданов. О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. УМН, т. 13, в. 3 (81), 1958.

*** Подробное изложение основных сведений по теории устойчивости см. в книгах Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957, глава IV; В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М., Физматгиз, 1957, стр. 317—329. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965, стр. 204—283.

Пример 1. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=z,\\ \frac{dz}{dx}&=-2y-2z.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

Общее решение этой системы имеет вид,

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{-x}\,[y_0\cos x+(y_0+z_0)\,\sin x],\\ z&=e^{-x}\,[z_0\cos x-(2y_0+z_0)\,\sin x],\end{aligned}\right\}$$

где произвольные постоянные y_0 и z_0 суть начальные значения искомых функций при $x=0$.

Рассмотрим частное решение

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{-x}\,\sin x,\\ z&=e^{-x}\,(\cos x-\sin x)\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

с начальными значениями искомых функций

$$y_0=0,\quad z_0=1\tag{40}$$

при $x=0$.

Возьмем решение

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}&=e^{-x}\,[\delta\cos x+(1+2\delta)\,\sin x],\\ \bar{z}&=e^{-x}\,[(1+\delta)\,\cos x-(1+3\delta)\,\sin x]\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

с измененными начальными значениями искомых функций

$$\bar{y}_0=y_0+\delta=\delta,\quad \bar{z}_0=z_0+\delta=1+\delta\tag{42}$$

при (том же значении аргумента) $x=0$.

Составив разности между соответствующими функциями решений (41) и (39)

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}-y&=e^{-x}\,[\delta\cos x+2\,\delta\sin x],\\ \bar{z}-z&=e^{-x}\,[\delta\cos x-3\,\delta\sin x],\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

видим, что эти разности будут сколь угодно малы для всех $x\geqslant 0$, если изменения начальных значений искомых функций достаточно малы. Следовательно, решение (39) устойчиво в смысле Ляпунова.

Заметим, что решение (39) обладает дополнительным свойством:

$$\lim_{x\to+\infty}(\bar{y}-y)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}(\bar{z}-z)=0\tag{44}$$

при любом δ, т. е. все решения (41) с измененными начальными значениями искомых функций *асимптотически приближаются к решению* (39), *когда* $x\to+\infty$.

Исследование устойчивости ненулевого решения (39) системы (38) можно заменить исследованием устойчивости нулевого решения

$$\eta\equiv 0,\quad \zeta\equiv 0\tag{45}$$

системы*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \zeta, \\ \frac{d\zeta}{dx} &= -2\eta - 2\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Для этого достаточно сделать в системе (38) замену искомых функций по формулам:

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta + e^{-x} \sin x, \\ z &= \zeta + e^{-x} (\cos x - \sin x). \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Дадим теперь строгое определение понятия устойчивости решения в смысле Ляпунова, причем, не умаляя общности, мы, следуя Ляпунову, будем считать исследуемое решение нулевым.

Имея в виду приложения к механике, будем рассматривать нормальную систему в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

где функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определены и непрерывны, как функции от времени t при всех значениях $t \geqslant t_0$ и как функции от (координат точки в фазовом пространстве) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, причем в самой этой точке функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ обращаются в нуль при всех значениях $t \geqslant t_0$:

$$\left.\begin{aligned} X_1(t, 0, 0, \ldots, 0) &= 0, \\ X_2(t, 0, 0, \ldots, 0) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n(t, 0, 0, \ldots, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Тогда очевидно, что система (48) имеет нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \ \ldots, \ x_n \equiv 0. \qquad (50)$$

Это решение соответствует нулевым начальным значениям искомых функций при $t = t_0$. Мы будем называть его *невозмущенным решением*, а соответствующее ему движение — *невозмущенным движением*.

---

* Заметим, что (46) совпадает с (38) как всегда для линейных систем.

Всякое решение

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t) \tag{51}$$

с ненулевыми начальными значениями искомых функций:

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_1 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n = x_n^{(0)} \tag{52}$$

при $t = t_0$, мы будем называть *возмущенным решением*, а соответствующее ему движение — *возмущенным движением*. Числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ будем называть *возмущениями*.

Предположим, что рассматриваемые возмущенные решения определены при всех значениях $t \geqslant t_0$*.

Определение 1. Если для всякого положительного числа ε, как бы оно мало ни было, можно выбрать положительное число δ так, чтобы при всяких возмущениях, удовлетворяющих условиям

$$|x_1^{(0)}| < \delta,\ \ |x_2^{(0)}| < \delta,\ \ldots,\ |x_n^{(0)}| < \delta, \tag{53}$$

и при всяком t, превосходящем t_0, для возмущенных решений выполнялись неравенства:

$$|x_1(t)| < \varepsilon,\ \ |x_2(t)| < \varepsilon,\ \ldots,\ |x_n(t)| < \varepsilon, \tag{54}$$

то невозмущенное решение (50) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*.

Таким образом, в случае устойчивости невозмущенного решения (50) все возмущенные решения (51), соответствующие достаточно малым возмущениям, будут при всех значениях $t \geqslant t_0$ находиться в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения. По существу здесь речь идет о непрерывной зависимости решений от начальных значений искомых функций, равномерной относительно независимой переменной во всем полубесконечном интервале $t \geqslant t_0$.

Определение 2. Если существует хоть одно положительное число ε, для которого нельзя подобрать такое положительное число δ, чтобы при выполнении неравенств (53) выполнялись бы и неравенства (54) при всех значениях $t \geqslant t_0$, то невозмущенное решение (50) называется *неустойчивым*.

Определение 3. Если невозмущенное решение (50) устойчиво и, кроме того, для всех решений (51), соответствующих достаточно малым возмущениям, имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0,\quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0,\ \ldots,\ \lim_{t\to+\infty} x_n(t) = 0, \tag{55}$$

то оно называется *асимптотически устойчивым*.

---

* Это предположение существенно (см.: Н. П. Еругин. Теоремы о неустойчивости, ПММ., г. XVI, в. 3, 1952, стр. 355—361).

Таким образом, в случае асимптотической устойчивости невозмущенного решения, все возмущенные решения (51), соответствующие достаточно малым возмущениям, будут не только находиться в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения при всех значениях $t \geqslant t_0$, но и будут асимптотически приближаться к нему при $t \to +\infty$.

Определение 4. Если невозмущенное решение (50) неустойчиво, но для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при возмущениях, подчиненных некоторым условиям вида

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \quad \text{или} \quad f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \geqslant 0, \tag{56}$$

где $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, в случае выполнения неравенств (53) выполнялись бы и неравенства (54) при всех значениях $t \geqslant t_0$, то такое невозмущенное решение называется *условно устойчивым*.

Таким образом, в случае условной устойчивости для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее число $\delta > 0$, но не при всяких возмущениях, а лишь при возмущениях, подчиненных некоторым условиям.

Пример 2. Нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

устойчиво. Действительно, из формулы общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \equiv x(t), \\ y &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t \equiv y(t), \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где x_0 и y_0 суть значения искомых функций x и y при $t = 0$*, следует, что все возмущенные решения определены при всех $t \geqslant 0$ и если

$$|x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{59}$$

то при всех $t \geqslant 0$ будем иметь:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \tag{60}$$

где ε — любое наперед заданное положительное число. Здесь $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

---

* Формула (58) получается из формулы общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}\right\} \tag{✲}$$

(см. п. **112**, пример), если определить C_1 и C_2 из начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$. В самом деле, полагая в формуле (✲) $x = x_0$, $y = y_0$, $t = 0$, получаем: $x_0 = C_1$, $y_0 = C_2$.

Пример 3. Нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x,\\ \frac{dy}{dt} &= -y\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

неустойчиво. В самом деле, из общего решения

$$\begin{aligned}x &= x_0 e^{t} \equiv x(t),\\ y &= y_0 e^{-t} \equiv y(t)\end{aligned} \tag{62}$$

видно, что если $x_0 > 0$ (< 0), то $x(t) \to +\infty$ $(-\infty)$ при $t \to +\infty$.

Пример 4. Нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x,\\ \frac{dy}{dt} &= -y\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

асимптотически устойчиво, ибо из общего решения

$$\left.\begin{aligned}x &= x_0 e^{-t} \equiv x(t),\\ y &= y_0 e^{-t} \equiv y(t)\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

видим, что при всех $t \geqslant 0$ будут выполняться неравенства:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x_0| < \varepsilon, \quad |y_0| < \varepsilon \quad (\delta = \varepsilon), \tag{65}$$

так что нулевое решение устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0^*. \tag{66}$$

Пример 5. Нулевое решение системы (61),

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x,\\ \frac{dy}{dt} &= -y,\end{aligned}$$

как показано в примере 3, неустойчиво в смысле Ляпунова, если на возмущения не налагать никаких ограничений, кроме требования их малости. Но, подчинив возмущения x_0, y_0 (при $t = 0$) ограничению $x_0 = 0$, мы получим, согласно формуле (62), что все возмущенные решения имеют вид $x \equiv 0$, $y = y_0 e^{-t}$, так что $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$, если $|y_0| < \varepsilon$ $(\delta = \varepsilon)$. Следовательно, нулевое решение системы (61) условно устойчиво $(\delta = \varepsilon)$.

В случаях, когда известно общее решение (общий интеграл) в элементарных функциях, вопрос об устойчивости невозмущен-

---

* Рассмотренное выше решение (39) системы (38) тоже асимптотически устойчиво.

ного решения обычно решается непосредственной проверкой. Однако эти случаи, как уже неоднократно отмечалось выше, представляют собой редкое исключение. Поэтому возникла потребность построения общей теории устойчивости решения, которая давала бы возможность судить об устойчивости невозмущенного решения только по аналитической структуре правых частей системы (48). Впервые строгая теория устойчивости решения (движения) была построена великим русским математиком академиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857—1918); им же впервые дано приведенное выше определение устойчивости. Основы этой теории изложены в его знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 году*. Изложение теории устойчивости движения читатель найдет в книгах Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, Н. Г. Дубошина, Н. Н. Красовского, В. И. Зубова, Р. Беллмана и Ж. Ла-Салля, С. Лефшетца **.

В последние годы появилось большое количество работ по теории устойчивости движения, в которых методы А. М. Ляпунова получили широкое применение и дальнейшее развитие ***. Исключительные заслуги в развитии и применении теории устойчивости принадлежат члену-корреспонденту Академии Наук СССР Николаю Гурьевичу Четаеву (1902—1959).

Наряду с устойчивостью и асимптотической устойчивостью в смысле Ляпунова часто представляют интерес свойства решений (движений) во всей области задания правых частей системы (48) как функций относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, в частности, во всем фазовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когда эта область совпадает с ним.

Одним из таких свойств является свойство ограниченности решений, а именно, часто требуется выяснить, не будут ли все

* А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л. Гостехиздат, 1950. Краткое изложение методов Ляпунова см. в статье В. И. Смирнова «Научные работы А. М. Ляпунова», в кн.: «Александр Михайлович Ляпунов», М—Л., 1953.

** Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955; И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966; Н. Г. Дубошин. Основы теории устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1952. Н. Н. Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959; В. И. Зубов. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., Изд. ЛГУ, 1957. Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ., 1958; Ж. Ла-Салль, С. Лефшетц. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.

*** См.: Н. П. Еругин. Обзор работ советских математиков по теории устойчивости движения в кн. «Александр Михайлович Ляпунов», М.—Л. 1953; В. В. Немыцкий. Обыкновенные дифференциальные уравнения в кн.: «Математика в СССР за 40 лет» Wolfgang Hahn. Theorie und Anwendung der Direkte Methode von Ljapounov, 1959; Л. Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.

решения этой системы ограниченными при $t \to +\infty$. Иногда бывает важно знать, имеет ли система (48) вообще ограниченные (при $t \to +\infty$) решения (т. е. существует ли хотя бы одно ограниченное решение).

Другое важное свойство, которым обладают решения (51) некоторых классов систем вида (48) — свойство (55), если оно выполнено при любых начальных условиях вида (52), т. е. случай, когда все движения системы, где бы они не начинались, с течением времени приближаются к невозмущенному движению.

Если невозмущенное решение (50) системы (48) устойчиво в смысле Ляпунова и выполнено (55) при любых начальных данных из области существования решений системы (48), то оно называется *устойчивым в целом.*

Если движение (50) устойчиво в смысле Ляпунова, то всегда существует некоторая область, окружающая начало координат, в которой проходят ограниченные движения; аналогично, если имеет место асимптотическая устойчивость, то существует область, в которой начинаются движения, обладающие свойством (55). Но эти области могут оказаться лишь частью области существования решений. В частности, если движение (50) асимптотически устойчиво, но неустойчиво в целом, то возникает задача нахождения той области, где начинаются движения, обладающие свойством (55). Эту область называют *областью устойчивости.* Исследованию такого рода вопросов, применительно к теории автоматического регулирования, посвящен ряд работ М. А. Айзермана, А. И. Лурье, А. М. Летова, В. И. Зубова и др.

Наряду с методами аналитического характера, предложенными Ляпуновым, для решения указанных задач в последнее время широко применяются качественные методы исследования, развитые Н. П. Еругиным*. Полезным оказалось также соединение методов Ляпунова с качественными методами, примененное в работах Н. П. Еругина, Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского, В. А. Плисса, А. П. Тузова, Б. Н. Скачкова, Б. А. Ершова и др. В некоторых из этих работ качественные методы применяются к уравнению выше второго порядка.

134. Теорема о дифференцируемости решения по начальным данным. В п. 132 мы доказали, что при выполнении условий теоремы Пикара решение нормальной системы дифференциальных уравнений является непрерывной функцией от начальных данных. Но иногда одной непрерывности оказывается недостаточно и требуется установить существование производных по

---

* Н. П. Еругин. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом (Прикладная математика и механика, т. XIV, в. 5, 1950).

начальным данным. Для этого, конечно, придется наложить на правые части системы дополнительные ограничения

Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{67'}$$

правые части которой определены и непрерывны в области

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b, \tag{68'}$$

и пусть в этой области существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial y_l}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда в области R выполнены оба условия теоремы Пикара.

Рассмотрим область

$$\left.\begin{aligned} R': \ |x^* - x_0| \leqslant \omega, \ |y_1^* - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots, |y_n^* - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2} \\ \left[0 < \omega < \frac{h}{4}, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{69'}$$

Возьмем в ней произвольную точку $(x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ и построим решение системы (67′), проходящее через эту точку, т. е. решение

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x;\ x^*,\ y_1^*,\ \ldots,\ y_n^*), \\ y_2 &= \varphi_2(x;\ x^*,\ y_1^*,\ \ldots,\ y_n^*), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x;\ x^*,\ y_1^*,\ \ldots,\ y_n^*) \end{aligned}\right\} \tag{70'}$$

с начальными условиями:

$$y_1 = y_1^*, \ \ldots, \ y_n = y_n^* \quad \text{при} \quad x = x^*. \tag{71'}$$

Согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных (п. 132), решение (70′) будет определено и непрерывно по x в интервале $|x - x_0| \leqslant \dfrac{h}{2} - \omega$, , а по начальным данным $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$ — в области (69′).

Теорема. *При сделанных предположениях функции* (70′) *имеют частные производные по начальным данным* $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$, *непрерывные как функции от независимой переменной* x *и начальных данных* $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$ *в области:*

$$|x-x_0| \leqslant \frac{h}{2}-\omega, \quad |x^*-x_0| \leqslant \omega, \quad |y_1^*-y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots,$$
$$|y_n^*-y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{72'}$$

Докажем эту теорему для $n=2$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Итак, рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Предположим, что правые части ее непрерывны вместе с частными производными по y и z в области

$$R: \qquad |x-x_0| \leqslant a, \quad |y-y_0| \leqslant b, \quad |z-z_0| \leqslant b. \tag{68}$$

Докажем, что *если $(x^*,\ y^*,\ z^*)$ — любая точка области*

$$R': \quad \left.\begin{aligned} &|x^*-x_0| \leqslant \omega, \quad |y^*-y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \quad |z^*-z_0| \leqslant \frac{b}{2} \\ &\left[0<\omega<\frac{h}{4}, \quad h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

то решение:

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ z &= \psi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*) \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

с начальными условиями:

$$y=y^*, \quad z=z^* \quad \text{при} \quad x=x^* \tag{71}$$

имеет частные производные по начальным данным x^*, y^*, z^* непрерывные как функции от x, x^*, y^*, z^* в области

$$|x-x_0| \leqslant \frac{h}{2}-\omega, \quad |x^*-x_0| \leqslant \omega, \quad |y^*-y_0| \leqslant \frac{b}{2},$$
$$|z^*-z_0| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{72}$$

Докажем сначала существование и непрерывность частных производных от решения (70) по y^*, т. е. $\frac{\partial y}{\partial y^*}$ и $\frac{\partial z}{\partial y^*}$. При этом, если $y^*=y_0 \pm \frac{b}{2}$, то речь будет идти об односторонней производной.

Дадим начальному значению y^* приращение Δy^* настолько малое, чтобы точка $(x^*,\ y^*+\Delta y^*,\ z^*)$ не выходила из R и построим решение:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y} &= \varphi(x;\ x^*,\ y^*+\Delta y^*,\ z^*), \\ \bar{z} &= \psi(x;\ x^*,\ y^*+\Delta y^*,\ z^*) \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

с начальными условиями:

$$\bar{y}=y^*+\Delta y^*, \quad \bar{z}=z^* \quad \text{при} \quad x=x^*. \tag{74}$$

Введем в рассмотрение функции:

$$u = \frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*}, \quad v = \frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}. \tag{75}$$

Докажем, что существуют пределы этих функций при $\Delta y^* \to 0$

С этой целью подставим последовательно функции (73) и (70) в систему (67). Так как эти функции образуют решения системы (67), то в результате получим тождества:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dx} &= f_1(x, \bar{y}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{dx} &= f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Вычтем почленно равенства (77) из равенств (76). Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\bar{y} - y)}{dx} &= f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, z), \\ \frac{d(\bar{z} - z)}{dx} &= f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Преобразуем правые части этих равенств:

$$\left.\begin{aligned} & f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, z) = [f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})] + \\ & + [f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)] = \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y}(\bar{y} - y) + \\ & + \frac{f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)}{\bar{z} - z}(\bar{z} - z) = \frac{\partial f_1[x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y}(\bar{y} - y) + \\ & + \frac{\partial f_1[x, y, z + \theta_{12}(\bar{z} - z)]}{\partial z}(\bar{z} - z) = a_{11}(x, \Delta y^*)(\bar{y} - y) + \\ & \qquad + a_{12}(x, \Delta y^*)(\bar{z} - z), \\ & f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, z) = [f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})] + \\ & + [f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)] = \frac{f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y}(\bar{y} - y) + \\ & + \frac{f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)}{\bar{z} - z}(\bar{z} - z) = \frac{\partial f_2[x, y + \theta_{21}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y}(\bar{y} - y) + \\ & + \frac{\partial f_2[x, y, z + \theta_{22}(\bar{z} - z)]}{\partial z}(\bar{z} - z) = a_{21}(x, \Delta y^*)(\bar{y} - y) + \\ & \qquad + a_{22}(x, \Delta y^*)(\bar{z} - z), \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} = \frac{\partial f_1[x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y}, \\
a_{12}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)}{\bar{z} - z} = \frac{\partial f_1[x, y, z + \theta_{12}(\bar{z} - z)]}{\partial z}, \\
a_{21}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} = \frac{\partial f_2[x, y + \theta_{21}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y}, \\
a_{22}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)}{\bar{z} - z} = \frac{\partial f_2[x, y, z + \theta_{22}(\bar{z} - z)]}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Выражения $a_{kl}(x, \Delta y^*)$ суть функции только от x и Δy^*. В самом деле, входящие в них функции y, z определяются формулами (70) и зависят от x, x^*, y^*, z^*, а функции $\bar{y}$, $\bar{z}$ определяются формулами (73) и зависят от x, x^*, y^*, z^* и Δy^*. Но точка (x^*, y^*, z^*) фиксирована. Поэтому выражения a_{kl} зависят только от x и Δy^*. Величины θ_{kl} тоже являются функциями от x и Δy^*, причем $|\theta_{kl}| < 1$.

Функции $a_{kl}(x, \Delta y^*)$ непрерывны относительно x и Δy^* при $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega$ и при достаточно малых $|\Delta y^*|$. Убедимся в этом, например, для функции $a_{11}(x, \Delta y^*)$. Для этого обратимся к первой из формул (80).

Если в точке $(\tilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*)$, принадлежащей вышеуказанной области, разность $\bar{y} - y$ отлична от нуля, то непрерывность функции $a_{11}(x, \Delta y^*)$ в этой точке следует из формулы

$$a_{11}(x, \Delta y^*) = \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y}. \tag{81}$$

В самом деле, так как y есть непрерывная функция от x при $x = \tilde{x}$, а функции $\bar{y}$, $\bar{z}$, согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных, непрерывны относительно x и Δy^* при $x = \tilde{x}$, $\Delta y^* = \widetilde{\Delta y}^*$ и все эти функции не выходят из области R, в которой функция $f_1(x, y, z)$ непрерывна по всем своим аргументам, то функции $f_1(x, \bar{y}, \bar{z})$ и $f_1(x, y, \bar{z})$ будут непрерывными функциями от x и Δy^* при $x = \tilde{x}$, $\Delta y^* = \widetilde{\Delta y}^*$ (как сложные функции от x и Δy^*). Таким образом, числитель и знаменатель дроби (81) суть непрерывные функции от x и Δy^* в точке $(\tilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*)$, причем знаменатель отличен от нуля в этой точке. Поэтому $a_{11}(x, \Delta y^*)$ есть непрерывная функция от x и Δy^* в точке $(\tilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*)$.

Если же точка $(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*)$ такова, что в ней $\bar{y} - y = 0$, то воспользуемся формулой

$$a_{11}(x, \Delta y^*) = \frac{\partial f_1 [x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y}. \tag{82}$$

Имеем:

$$a_{11}(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*) = \frac{\partial f_1 [\tilde{x}, y(\tilde{x}), \bar{z}(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*)]}{\partial y}. \tag{83}$$

Если $(x, \Delta y^*) \to (\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*)$, то разность $\bar{y} - y$ стремится к нулю, и, вследствие предположенной непрерывности частных производных от правых частей системы (67), мы будем иметь:

$$\frac{\partial f_1 [x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z}]}{\partial y} \to \frac{\partial f_1 [\tilde{x}, y(\tilde{x}), \bar{z}(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*)]}{\partial y}, \tag{84}$$

т. е.

$$a_{11}(x, \Delta y^*) \to a_{11}(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*), \tag{85}$$

а это и означает, что функция a_{11} $(x, \Delta y^*)$ непрерывна в точке $(\tilde{x}, \widetilde{\Delta} y^*)$.

В частности, функции a_{kl} $(x, \Delta y^*)$ непрерывны и при $\Delta y^* = 0$, причем мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \\ a_{12}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}, \\ a_{21}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y}, \\ a_{22}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

После указанных преобразований система (78) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\bar{y} - y)}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*)(\bar{y} - y) + a_{12}(x, \Delta y^*)(\bar{z} - z), \\ \frac{d(\bar{z} - z)}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*)(\bar{y} - y) + a_{22}(x, \Delta y^*)(\bar{z} - z). \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Разделив уравнения этой системы на Δy^*, получим следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{\bar{y} - y}{\Delta y^*}\right)}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*)\,\frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*} + a_{12}(x, \Delta y^*)\,\frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}, \\ \frac{d\left(\dfrac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}\right)}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*)\,\frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*} + a_{22}(x, \Delta y^*)\,\frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Из тождеств (88) следует, что функции (75) являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*)\, u + a_{12}(x, \Delta y^*)\, v, \\ \frac{dv}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*)\, u + a_{22}(x, \Delta y^*)\, v. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Найдем значения функций (75) при $x=x^*$. Полагая в формулах (75) $x=x^*$ и принимая во внимание начальные данные решений (70) и (73), получаем:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{x=x^*} &= \frac{\bar{y}\,|_{x=x^*} - y\,|_{x=x^*}}{\Delta y^*} = \frac{(y^* + \Delta y^*) - y^*}{\Delta y^*} = 1, \\ v\big|_{x=x^*} &= \frac{\bar{z}\,|_{x=x^*} - z\,|_{x=x^*}}{\Delta y^*} = \frac{z^* - z^*}{\Delta y^*} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Таким образом, функции (75) являются решением системы (89) с начальными условиями:

$$u = 1, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = x^*. \tag{91}$$

Система (89) л и н е й н а я, причем, согласно доказанному выше, ее коэффициенты $a_{kl}(x, \Delta y^*)$ непрерывны относительно независимой переменной x при $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega$ и относительно параметра Δy^* при достаточно малом $|\Delta y^*|$ и, в частности, при $\Delta y^* = 0$. Поэтому система (89) имеет единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x;\ x^*,\ 1,\ 0;\ \Delta y^*), \\ v &= v(x;\ x^*,\ 1,\ 0;\ \Delta y^*), \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

удовлетворяющее начальным условиям (91) и содержащее Δy^* в качестве п а р а м е т р а. Согласно замечанию 1 п. **131**, это решение есть н е п р е р ы в н а я ф у н к ц и я от Δy^* в т о ч к е $\Delta y^* = 0$. Вследствие этого существуют пределы функций u и v при $\Delta y^* \to 0$.

Но эти пределы есть не что иное, как частные производные $\frac{\partial y}{\partial y^*}$, $\frac{\partial z}{\partial y^*}$. Таким образом, с у щ е с т в о в а н и е частных производных от решения (70) по y^* доказано.

Докажем теперь, что эти производные н е п р е р ы в н ы к а к ф у н к ц и и о т x и н а ч а л ь н ы х д а н н ы х x^*, y^*, z^*. Чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что предельные функции

$$U = \frac{\partial y}{\partial y^*}, \quad V = \frac{\partial z}{\partial y^*} \tag{93}$$

являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} V, \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} V \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

с начальными условиями:

$$U = 1, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad x = x^*, \tag{95}$$

т. е. с теми же начальными условиями, что и функции (75).

В самом деле, переходя к пределу в тождествах (88) при $\Delta y^* \to 0$ и принимая во внимание формулы (86), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{\partial y}{\partial y^*}\right)}{dx} &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y^*} + \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y^*}, \\ \frac{d\left(\dfrac{\partial z}{\partial y^*}\right)}{dx} &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y^*} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y^*}, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

откуда и следует, что функции (93) являются решением системы (94). Далее, из формул (90) мы видим, что значения, принимаемые функциями (75) при $x=x^*$, не зависят от Δy^*. Поэтому пределы этих функций при $\Delta y^* \to 0$, т. е. функции (93), принимают те же значения при $x=x^*$, что и функции (75). Таким образом, функции (93) образуют решение системы (94) с начальными условиями (95).

Система (94) линейная, причем коэффициенты ее суть непрерывные функции от независимой переменной x и от параметров x^*, y^*, z^* в области (72). Последнее вытекает из того, что в силу п. **132** функции y и z зависят непрерывно от x и x^*, y^*, z^* в области (72) и не выходят из области R, а частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ непрерывны по x, y, z в этой области, так что коэффициенты системы (94), рассматриваемые как сложные функции от x, x^*, y^*, z^*, будут непрерывны в области (72).

Одно из начальных данных решения (93), а именно, начальное значение независимой переменной является, очевидно, функцией от параметра x^* и притом непрерывной (в то время как остальные начальные данные не зависят от параметров).

Поэтому, вследствие замечания 2 п. **131**, решение системы (94) с начальными условиями (95) непрерывно относительно x, x^*, y^*, z^* в той же области (72), а так как этим решением как раз и являются частные производные от решения (70) по начальному значению y^*: $\frac{\partial y}{\partial y^*}$ и $\frac{\partial z}{\partial y^*}$, то последние суть непрерывные функции от независимой переменной x и начальных данных x^*, y^*, z^* в области (72).

Существование и непрерывность частных производных $\frac{\partial y}{\partial z^*}$, $\frac{\partial z}{\partial z^*}$ доказывается аналогично. При этом оказывается, что эти частные производные будут решениями системы (94) с начальными условиями:

$$U = 0, \quad V = 1 \quad \text{при} \quad x = x^*. \tag{97}$$

Докажем теперь существование и непрерывность частных производных от решения (70) по начальному значению независимой переменной: $\frac{\partial y}{\partial x^*}$, $\frac{\partial z}{\partial x^*}$.

Поступая так же, как и при доказательстве существования частных производных $\frac{\partial y}{\partial y^*}$, $\frac{\partial z}{\partial y^*}$, дадим начальному значению x^* приращение Δx^*, беря последнее настолько малым, чтобы точка $(x^* + \Delta x^*,\ y^*,\ z^*)$ не выходила из области R, и построим решение:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y} &= \varphi\,(x;\ x^* + \Delta\,x^*,\ y^*,\ z^*), \\ \tilde{z} &= \psi\,(x;\ x^* + \Delta\,x^*,\ y^*,\ z^*) \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

с начальными условиями:

$$\tilde{y} = y^*, \quad \tilde{z} = z^* \quad \text{при} \quad x = x^* + \Delta\,x^*. \tag{99}$$

Введем в рассмотрение функции:

$$u = \frac{\tilde{y} - y}{\Delta\,x^*}, \quad v = \frac{\tilde{z} - z}{\Delta\,x^*}. \tag{100}$$

Докажем, что эти функции имеют пределы, когда $\Delta x^* \to 0$.

С этой целью подставим решения (98) и (70) в систему (67) и вычтем почленно вторые тождества из первых. Получим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,(\tilde{y} - y)}{dx} &= f_1\,(x,\ \tilde{y},\ \tilde{z}) - f_1\,(x,\ y,\ z), \\ \frac{d\,(\tilde{z} - z)}{dx} &= f_2\,(x,\ \tilde{y},\ \tilde{z}) - f_2\,(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Преобразуя правые части этой системы так же, как мы преобразовывали правые части системы (78), получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,(\tilde{y} - y)}{dx} &= b_{11}\,(x,\ \Delta\,x^*)\ (\tilde{y} - y) + b_{12}\,(x,\ \Delta\,x^*)\ (\tilde{z} - z), \\ \frac{d\,(\tilde{z} - z)}{dx} &= b_{21}\,(x,\ \Delta\,x^*)\ (\tilde{y} - y) + b_{22}\,(x,\ \Delta\,x^*)\ (\tilde{z} - z), \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
b_{11}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_1(x, y, \tilde{z})}{\tilde{y} - y} = \frac{\partial f_1[x, y + \theta_{11}(\tilde{y} - y), \tilde{z}]}{\partial y}, \\
b_{12}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_1(x, y, \tilde{z}) - f_1(x, y, z)}{\tilde{z} - z} = \frac{\partial f_1[x, y, z + \theta_{12}(\tilde{z} - z)]}{\partial z}, \\
b_{21}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_2(x, y, \tilde{z})}{\tilde{y} - y} = \frac{\partial f_2[x, y + \theta_{21}(\tilde{y} - y), \tilde{z}]}{\partial y}, \\
b_{22}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_2(x, y, \tilde{z}) - f_2(x, y, z)}{\tilde{z} - z} = \frac{\partial f_2[x, y, z + \theta_{22}(\tilde{z} - z)]}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Можно доказать, что функции $b_{kl}(x, \Delta x^*)$ непрерывны относительно x и Δx^* при $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega$ и при достаточно малом $|\Delta x^*|$. В частности, они будут непрерывными функциями от Δx^* и при $\Delta x^* = 0$, причем

$$\left.\begin{aligned}
b_{11}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \\
b_{12}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}, \\
b_{21}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y}, \\
b_{22}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (104)$$

Разделив оба уравнения системы (102) на Δx^*, получим тождества:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{\tilde{y} - y}{\Delta x^*}\right)}{dx} &= b_{11}(x, \Delta x^*)\, \frac{\tilde{y} - y}{\Delta x^*} + b_{12}(x, \Delta x^*)\, \frac{\tilde{z} - z}{\Delta x^*}, \\
\frac{d\left(\frac{\tilde{z} - z}{\Delta x^*}\right)}{dx} &= b_{21}(x, \Delta x^*)\, \frac{\tilde{y} - y}{\Delta x^*} + b_{22}(x, \Delta x^*)\, \frac{\tilde{z} - z}{\Delta x^*}.
\end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Отсюда видно, что функции (100) образуют решение системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= b_{11}(x, \Delta x^*)\, u + b_{12}(x, \Delta x^*)\, v, \\
\frac{dv}{dx} &= b_{21}(x, \Delta x^*)\, u + b_{22}(x, \Delta x^*)\, v.
\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Найдем значения функций (100) при $x = x^*$. Полагая в формулах (100) $x = x^*$ и принимая во внимание начальные данные решения (70), получаем:

$$\left.\begin{aligned} u\,\big|_{x=x^*} &= \frac{\tilde{y}\,\big|_{x=x^*} - y\,\big|_{x=x^*}}{\Delta x^*} = \frac{\tilde{y}\,\big|_{x=x^*} - y^*}{\Delta x^*}, \\ v\,\big|_{x=x^*} &= \frac{\tilde{z}\,\big|_{x=x^*} - z\,\big|_{x=x^*}}{\Delta x^*} = \frac{\tilde{z}\,\big|_{x=x^*} - z^*}{\Delta x^*}. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Но из тождеств:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y} &= y^* + \int\limits_{x^*+\Delta x^*}^{x} f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z})\, dx, \\ \tilde{z} &= z^* + \int\limits_{x^*+\Delta x^*}^{x} f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z})\, dx \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

при $x = x^*$ находим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}\,\big|_{x=x^*} - y^* &= \int\limits_{x^*+\Delta x^*}^{x^*} f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z})\, dx, \\ \tilde{z}\,\big|_{x=x^*} - z^* &= \int\limits_{x^*+\Delta x^*}^{x^*} f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z})\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Применим к интегралам справа теорему о среднем. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}\,\big|_{x=x^*} - y^* = -f_1 [x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \Delta x^*), \\ \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \Delta x^*)]\ \Delta x^*, \\ \tilde{z}\,\big|_{x=x^*} - z^* = -f_2 [x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \Delta x^*), \\ \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \Delta x^*)]\ \Delta x^*. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Подставляя в формулы (107), окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} u\,\big|_{x=x^*} = -f_1 [x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \Delta x^*), \\ \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*,\ \Delta x^*)], \\ v\,\big|_{x=x^*} = -f_2 [x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \Delta x^*), \\ \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*,\ \Delta x^*)]. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Таким образом, функции (100) являются решением системы (106) с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u &= -f_1[x^* + \theta_1 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\qquad\qquad \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*)], \\ v &= -f_2[x^* + \theta_2 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\qquad\qquad \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*] \\ &\text{при } x = x^*. \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Система (106) линейная. Коэффициенты этой системы, как указано выше, непрерывны относительно независимой переменной x при $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega$ и относительно параметра Δx^* в точке $\Delta x^* = 0$. Начальные значения u и v как функции параметра Δx^*, очевидно, также непрерывны в точке $\Delta x^* = 0$ (так как $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$). А тогда, в силу замечания 2 п. **131**, функции (100) будут непрерывными функциями параметра Δx^* в точке $\Delta x^* = 0$. Поэтому функции (100) имеют пределы при $\Delta x^* \to 0$, равные соответственно

$$U = \frac{\partial y}{\partial x^*}, \quad V = \frac{\partial z}{\partial x^*}, \tag{113}$$

чем и доказывается существование частных производных от решения (70) по начальному значению независимой переменной.

Для доказательства непрерывности этих частных производных заметим, что функции (113) образуют решение системы дифференциальных уравнений (94):

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} V,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} V,$$

с начальными условиями:

$$U = -f_1(x^*, y^*, z^*), \quad V = -f_2(x^*, y^*, z^*) \quad \text{при} \quad x = x^*, \tag{114}$$

в чем нетрудно убедиться, если перейти к пределу при $\Delta x^* \to 0$ в тождествах (105) и в начальных условиях (112).

Коэффициенты системы (94) являются непрерывными функциями x и параметров x^*, y^*, z^* в области (72). Начальные данные решения (113), как это видно из (114), суть непрерывные функции параметров x^*, y^*, z^* в области (69). Поэтому, согласно теореме замечания 2 п. 131, решение (113) будет непрерывной функцией x и начальных значений x^*, y^*, z^* в области (72), чем и доказывается непрерывность производных $\frac{\partial y}{\partial x^*}$, $\frac{\partial z}{\partial x^*}$ относительно независимой переменной x и начальных данных x^*, y^*, z^* в области (72).

Итак, все частные производные от решения (70) по начальным данным x^*, y^*, z^* существуют и непрерывны относительно x, x^*, y^*, z^*. При этом частные производные по каждому (одному и тому же) начальному данному образуют решение одной и той же однородной линейной системы (94) с соответствующими начальными условиями (95), (97) или (114).

Еще раз обращаем внимание читателя на то, что начальные данные x^*, y^*, z^* входят в качестве параметров как в коэффициенты системы (94) [ибо под y и z мы должны подразумевать функции (70)], так и в соответствующие начальные условия.

Замечание. *Если система (67′) линейная, т. е. имеет вид (22″), и если коэффициенты $f_{kl}(x)$ и функции $f_k(x)$ непрерывны в интервале $|x-x_0| \leqslant a$, то решение (70′) имеет частные производные по начальным значениям x^*, y_1^*, ..., y_n^*, непрерывные в области*

$$\left.\begin{array}{c} |x-x_0| \leqslant \frac{a}{2}-\omega,\ |x^*-x_0| \leqslant \omega,\ |y_1^*| < +\infty,\ \ldots, \\ |y_n^*| < +\infty \quad \left(0 < \omega < \frac{a}{4}\right)^*. \end{array}\right\} \quad (115)$$

135. Обобщения. Можно доказать следующие более общие утверждения**.

1°. *Если правые части системы (67′) непрерывны в области (68′) вместе с частными производными m-го порядка по совокупности переменных y_1, y_2, ..., y_n, то решение (70′) имеет все частные производные порядка m по совокупности начальных значений искомых функций y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* и те частные производные m-го порядка по совокупности всех начальных данных x^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, в которых дифференцирование по x^* производится один раз; если, кроме того, правые части системы (67′) имеют частные производные p-го порядка ($p \leqslant m$) по независимой переменной x, непрерывные в области (68′), то решение (70′) имеет частные производные порядка m по совокупности всех начальных данных x^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, в которых дифференцирование по x^* производится не более $p+1$ раз.*

---

* Для одного линейного уравнения первого порядка справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из формулы общего решения в форме Коши.

** См.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 1953, стр. 298—307; И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, стр. 83—87.

В частности, решение (70′) *линейной системы* (22″), *у которой коэффициенты* $p_{kl}(x)$ *и функции* $f_k(x)$ *непрерывны в интервале* $|x-x_0| \leqslant a$, *имеет частные производные всех порядков по начальным значениям* $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, *непрерывные в области* (115), *и частные производные любого порядка по совокупности всех начальных данных, в которых дифференцирование по* x^* *производится один раз.*

Если, кроме того, предположить, что коэффициенты $p_{kl}(x)$ *и функции* $f_k(x)$ *имеют производные p-го порядка, непрерывные в* $|x-x_0| \leqslant a$, *то решение* (70′) *имеет частные производные любого порядка по совокупности начальных данных* $x^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, *непрерывные в области* (115), *в которых дифференцирование по* x^* *производится не более чем* $p+1$ *раз.*

2°. *Если правые части системы* (1′) *непрерывно дифференцируемы по параметрам, то и решение* (6′) *будет непрерывно дифференцируемо по параметрам. В частности, это имеет место для систем, правые части которых линейны относительно параметров.*

3°. *Если правые части системы* (1′) *имеют непрерывные смешанные частные производные по параметрам порядка* m, *то и решение* (6′) *имеет непрерывные соответствующие смешанные частные производные по параметрам порядка* m.

4°. Все теоремы пп. **131**, **132**, **134**, а также их обобщения 1°—3°, подобно теореме Пикара, переносятся с соответствующими изменениями и на уравнения n-го порядка.

§ 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

136. Теорема существования общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений* . Теорема Пикара, устанавливая достаточные условия существования и единственности решения конкретной задачи Коши, обладает, однако, тем недостатком, что, изменив начальные данные, мы вынуждены заново проводить все рассуждения и вычисления, связанные с применением метода последовательных приближений.

Поэтому представляется весьма важным доказательство такой теоремы, которая устанавливала бы существование общего решения, позволяющего получать решение любой задачи Коши, с начальными данными из области существования этого общего решения, за счет надлежащего выбора произвольных постоянных.

В настоящем параграфе мы докажем, что *если в заданной области* R *выполнены условия теоремы Пикара, то существует общее решение, определенное в некоторой области* R', *лежащей внутри области* R. При этом доказательство теоремы существования общего ре-

* Здесь мы следуем Н. П. Еругину, который так излагал этот вопрос в своих лекциях в 1939 г.

шения мы будем проводить для нормальной системы дифференциальных уравнений, так же как это имело место при доказательстве теоремы Пикара.

Пусть дана система:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1'}$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant b, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b \tag{2'}$$

условиям теоремы Пикара. Тогда существует единственное решение:

$$y_k = \varphi_k(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3'}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_k = y_k^0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{5'}$$

где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ и не выходит при этих значениях x из области R.

Построим область

$$R_{\frac{1}{2}}: \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \ |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{6'}$$

Возьмем в ней п р о и з в о л ь н у ю точку $(x_0, \overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)})$ и построим еще область

$$\overline{R}_{\frac{1}{2}}: \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \ |y_1 - \overline{y}_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots, \ |y_n - \overline{y}_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{7'}$$

Очевидно, область $\overline{R}_{\frac{1}{2}}$ содержится в области R. Поэтому в ней выполнены условия теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение:

$$y_k = \varphi_k(x; x_0, \overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8'}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_k = \overline{y}_k^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9'}$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо относительно x в интервале

$$|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} \tag{10'}$$

и не выходит при этих значениях x из области $\overline{R}_{\frac{1}{2}}$.

Далее, согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных*, решение (8') будет непрерывной функ-

* См. п. 132.

цией x и начальных значений искомых функций $\overline{y}^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)}$ в области

$$|x-x_0| \leqslant \frac{h}{2}, \quad |\overline{y}_1^{(0)} - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots, \ |\overline{y}_n^{(0)} - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}. \qquad (11')$$

(Мы пишем $\frac{h}{2}$ вместо $\frac{h}{2}-\omega$, так как здесь начальное значение независимой переменной не варьируется).

Теорема. *При сделанных предположениях относительно правых частей системы* (1′) *формулы* (8′), *где величины* $\overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)}$ *рассматриваются как произвольные постоянные, подчиненные условиям*

$$|\overline{y}_1^{(0)} - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \ \ldots, \ |\overline{y}_n^{(0)} - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{2}, \qquad (12')$$

дают общее решение системы (1′) *в области*

$$R': \quad |x-x_0| \leqslant \frac{h}{4}, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{4}, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{4}, \qquad (13')$$

содержащей внутри себя точку $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Докажем эту теорему для $n=2$. В общем случае доказательство проводится аналогично.

Итак, рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: \qquad |x-x_0| \leqslant a, \quad |y-y_0| \leqslant b, \quad |z-z_0| \leqslant b \qquad (2)$$

условиям теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x;\ x_0, y_0, z_0), \\ z &= \psi(x;\ x_0, y_0, z_0), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \qquad (4)$$

Это решение определено и непрерывно в интервале

$$|x-x_0| \leqslant h, \qquad (5)$$

где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ и не выходит при этих значениях x из области R.

Построим область

$$R_{\frac{1}{2}}: \qquad |x-x_0|\leqslant\frac{a}{2},\ |y-y_0|\leqslant\frac{b}{2},\ |z-z_0|\leqslant\frac{b}{2}. \tag{6}$$

Возьмем в ней произвольную точку $(x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ и построим еще область $\bar{R}_{\frac{1}{2}}: |x-x_0|\leqslant\frac{a}{2}, |y-\bar{y}_0|\leqslant\frac{b}{2}, |z-\bar{z}_0|\leqslant\frac{b}{2}$. (7)

Очевидно, область $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$ содержится в области R. Поэтому в ней выполнены все условия теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x;\ x_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0), \\ z &= \psi(x;\ x_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=\bar{y}_0,\quad z=\bar{z}_0 \quad \text{при} \quad x=x_0. \tag{9}$$

Это решение заведомо определено и непрерывно в интервале

$$|x-x_0|\leqslant\frac{h}{2} \tag{10}$$

и не выходит при этих значениях x из области $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$.

Решение (8) будет непрерывной функцией от x, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ в области

$$|x-x_0|\leqslant\frac{h}{2},\quad |\bar{y}_0-y_0|\leqslant\frac{b}{2},\quad |\bar{z}_0-z_0|\leqslant\frac{b}{2}. \tag{11}$$

Докажем, что *формулы* (8), *где величины* $\bar{y}_0$ *и* $\bar{z}_0$ *рассматриваются как произвольные постоянные, подчиненные условиям:*

$$|\bar{y}_0-y_0|\leqslant\frac{b}{2},\quad |\bar{z}_0-z_0|\leqslant\frac{b}{2}, \tag{12}$$

дают общее решение системы (1) *в области*

$$R': \qquad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{4},\ |y-y_0|\leqslant\frac{b}{4},\ |z-z_0|\leqslant\frac{b}{4}, \tag{13}$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0, z_0).

Достаточно [107] доказать, что система (8) разрешима относительно $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$ в области R'.

С этой целью возьмем в области R' любую точку (x^*, y^*, z^*) и построим область

$$R^*_{\frac{1}{4}}: \qquad |x-x^*|\leqslant\frac{a}{4},\ |y-y^*|\leqslant\frac{b}{4},\ |z-z^*|\leqslant\frac{b}{4}. \tag{14}$$

Так как область $R^*_{\frac{1}{4}}$ содержится в $R_{\frac{1}{2}}$, то в ней выполнены все условия теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ z &= \psi(x;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y^*, \quad z = z^* \quad \text{при} \quad x = x^*. \tag{16}$$

Это решение заведомо определено и непрерывно в интервале

$$|x - x^*| \leqslant \frac{h}{4} \tag{17}$$

и не выходит при этих значениях x из области $R^*_{\frac{1}{4}}$, а следовательно, и из $R_{\frac{1}{2}}$.

Согласно неравенству (17), решение (15) существует на расстоянии $\frac{h}{4}$ от точки $x = x^*$, где бы последнюю внутри интервала $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{4}$ ни взять.

Но, в силу выбора точки (x^*, y^*, z^*) имеем:

$$|x_0 - x^*| \leqslant \frac{h}{4}. \tag{18}$$

Поэтому решение (15) будет определено и в точке $x = x_0$. Обозначим соответствующие этой точке значения y и z через $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_0 &= \varphi(x_0;\ x^*,\ y^*,\ z^*), \\ \bar{z}_0 &= \psi(x_0;\ x^*,\ y^*,\ z^*). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Точка $(x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$, где $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$ определены формулами (19), принадлежит области $R_{\frac{1}{2}}$.

Построим решение (8), проходящее именно через эту точку. Решение (15) в силу (19) тоже проходит через эту точку, так что, согласно теореме о единственности, решения (8) и (15) совпадают. Следовательно, решение (8) проходит через точку (x^*, y^*, z^*), т. е. мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} y^* &= \varphi(x^*;\ x_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0), \\ z^* &= \psi(x^*;\ x_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Равенства (20) и (19) показывают, что система (8) разрешима относительно $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$ в области R'.

Теорема доказана.

137. Замечания.

1. В формулах (8) роль произвольных постоянных играют начальные значения y_0, z_0 искомых функций, так что эти формулы дают **общее решение системы** (1) **в форме Коши**. Но произвольные постоянные могут входить в общее решение не обязательно в качестве начальных значений искомых функций. Для большинства уравнений, рассмотренных в предыдущих главах, именно данное обстоятельство и имело место. Объясняется это тем, что в получаемых там общих решениях произвольные постоянные входили в общее решение в результате применения того или иного специального приема интегрирования этих уравнений.

Напомним, что для линейного уравнения первого порядка мы получили также общее решение и в форме Коши, где роль произвольной постоянной играло начальное значение y_0 искомой функции.

В дальнейшем (п. **205**) мы увидим, что в случае линейной системы произвольные постоянные, входящие в общее решение, легко выражаются через начальные значения искомых функций.

Для нелинейных уравнений точное выражение произвольных постоянных через начальные значения искомых функций фактически чаще всего не выполнимо, ибо приводит к решению сложных уравнений.

2. Доказанная теорема о существовании общего решения, так же как и теорема Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений, распространяется и на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

138. Доказательство существования n независимых интегралов нормальной системы n уравнений. В п. **110** мы доказали, что нормальная система

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

не может иметь более чем n независимых интегралов, но вопрос о том, при каких условиях система (21) **имеет** n независимых интегралов, остался открытым. Теперь, опираясь на теорему существования общего решения, мы сможем ответить и на этот вопрос.

Предположим, что правые части системы (21) удовлетворяют в области

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant b, \ \ldots, \ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant b \tag{22}$$

обоим условиям теоремы Пикара. Тогда, согласно теореме п. **136,** формулы

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x;\ x_0,\ \overline{y}_1^{(0)},\ \ldots,\ \overline{y}_n^{(0)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x;\ x_0,\ \overline{y}_1^{(0)},\ \ldots,\ \overline{y}_n^{(0)}) \end{array}\right\} \qquad (23)$$

дают общее решение системы (21) в области

$$R':\quad |x - x_0| \leqslant \frac{h}{4},\quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leqslant \frac{b}{4},\ \ldots,\ |y_n - y_n^{(0)}| \leqslant \frac{b}{4}. \qquad (24)$$

При этом $\overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)}$ рассматриваются как произвольные постоянные.

Разрешая систему (23) относительно $\overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)}$ в области R', получим:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{y}_1^{(0)} = \varphi_1(x_0;\ x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_n^{(0)} = \varphi_n(x_0;\ x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n). \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Функции, стоящие в правых частях этих равенств, и образуют (при каждом фиксированном значении начального значения x_0 независимой переменной x) *совокупность n независимых интегралов* системы дифференциальных уравнений* (21). Эти интегралы непрерывны относительно $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Если предположить дополнительно, что правые части системы (21) имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то интегралы, стоящие в правых частях формул (25), будут иметь непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, ибо функции φ_k в правых частях формул (23) и (25) одни и те же, а функции φ_k в (23) имеют [134] непрерывные частные производные по $x_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0$.

Заметим еще, что частные производные от интегралов φ_k по $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} = 0\ (k \neq l),\qquad \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_l} = 1\quad \text{при}\quad x = x_0 \qquad (26)$$

(почему?)

Так как система (21) не может иметь более чем n независимых интегралов, то окончательно мы приходим к следующему утверждению: *система* (21) *имеет n и только n независимых интегралов, определенных в некоторой области, содержащей внутри себя точку* $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, *в окрестности которой правые части системы* (21) *удовлетворяют обоим условиям теоремы Пикара и, кроме того, непрерывно дифференцируемы по $y_1, y_2, \ldots, y_n$.*

* Эти интегралы независимы, потому что из (25) можно найти $y_1, \ldots, y_n$, как показывают формулы (23).

139. Особые точки уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Наряду с этим уравнением мы, как сказано в п. 1, всегда будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{1'}$$

используя последнее в окрестности тех точек, в которых $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* уравнения (1), если в любой достаточно малой окрестности ее, правые части уравнений (1) и (1′) не удовлетворяют условиям теоремы Пикара. Все остальные точки называются *неособыми*.

Особая точка (x_0, y_0) называется *изолированной особой точкой*, если в некоторой достаточно малой окрестности ее нет других особых точек.

Точка (x_0, y_0) будет, например, особой, если уравнение (1) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{2}$$

причем $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Такую особую точку будем называть *особой точкой типа* $\frac{0}{0}$.

Если правая часть уравнения (1) обращается в бесконечность в точке (x_0, y_0), но у перевернутого уравнения (1′) правая часть удовлетворяет в некоторой окрестности этой точки условиям теоремы Пикара, то точка (x_0, y_0) будет неособой точкой для перевернутого, а следовательно и для исходного уравнения. В этом случае уравнение (1′) имеет единственную интегральную кривую $x = x(y)$, проходящую через точку (x_0, y_0), причем касательная к ней в этой точке параллельна оси ординат.

В качественной теории дифференциальных уравнений показывается, что *знание конфигурации особых точек, т. е. расположения их на плоскости (x, y) и поведения интегральных кривых в окрестности особых точек, вообще говоря, дает возможность судить о поведении интегральных кривых во всей области задания дифференциального уравнения.*

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}. \tag{3}$$

Здесь все точки плоскости (x, y) неособые, кроме, быть может, точек, лежащих на оси Ox. В каждой точке оси Ox правая часть уравнения (3) обращается в бесконечность. Однако у перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dx} = y \tag{3'}$$

правая часть в точках оси Ox равна нулю, т. е. имеет уже конечное значение и удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, точки оси Ox тоже являются неособыми точками уравнения (3). Через каждую точку $(x_0, 0)$ оси Ox проходит единственная интегральная кривая $x=x(y)$, имеющая в этой точке, согласно уравнению (3′), касательную, параллельную оси Oy. И в самом деле, интегрируя уравнение (3′) при начальном условии $x=x_0$ при $y=0$, мы получаем единственную интегральную кривую

$$x = \frac{y^2}{2} + x_0 \quad \text{или} \quad y^2 = 2\,(x - x_0), \tag{4}$$

которая, очевидно, проходит через точку $(x_0, 0)$ и имеет в ней касательную, параллельную оси Oy. Таким образом, уравнение (3) не имеет особых точек.

Пример 2. Рассмотрим уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

Здесь все точки плоскости (x, y), не лежащие на оси Oy, являются неособыми. В точках оси Oy будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \tag{5'}$$

откуда следует, что все точки, не лежащие на оси Ox, то же неособые. Остается рассмотреть начало координат: $x=0$, $y=0$. В этой точке правые части обоих уравнений (5) и (5′) обращаются в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так что они даже не определены и, следовательно, условия теоремы Пикара ни в какой окрестности этой точки не выполняются ни для одного из уравнений (5) и (5′). Поэтому начало координат является особой точкой уравнения (5), причем последняя является изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$.

Интегрируя уравнение (5), мы получим семейство полупрямых

$$y = Cx \quad (x \neq 0), \quad x = 0 \quad (y \neq 0),$$

примыкающих к особой точке — началу координат. Этот факт выявляет некоторую особенность поведения семейства интегральных кривых в окрестности изолированной особой точки типа $\frac{0}{0}$. В следующем примере мы встретимся с другой особенностью поведения интегральных кривых в окрестности особой точки.

Пример 3. Возьмем уравнение**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{6}$$

Здесь начало координат, так же как и в предыдущем примере является изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$. Общий интеграл уравнения (6)

---

* Ср. п. **4**, пример **3**.

** Ср. п. **4**, пример **4**.

имеет вид

$$x^2+y^2=C^2, \tag{7}$$

так что все интегральные кривые замкнуты и содержат особую точку — начало координат — внутри себя и ни одна из интегральных кривых не примыкает к особой точке.

Пример 4. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy} \qquad (ad-bc\neq 0) \tag{8}$$

с дробно-линейной однородной правой частью начало координат будет изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$. Поведение интегральных кривых уравнения (8) в окрестности особой точки — начала координат — мы рассматриваем в п. 141.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}. \tag{9}$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна в верхней полуплоскости ($y\geqslant 0$). Все точки верхней полуплоскости являются неособыми, исключая точки, лежащие на оси Ox. Все последние точки являются особыми, так как в них нарушено условие Липшица. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\bigg|_{y=0}=\infty.$$

В рассматриваемом случае особые точки неизолированные, они образуют собою линию. Такая линия называется *особой линией* дифференциального уравнения.

140. Особые точки нормальной системы дифференциальных уравнений. Точки равновесия (покоя). Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Точка $(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$ называется *особой точкой* этой системы, если в любой достаточно малой окрестности ее не выполнено хоть одно из условий теоремы Пикара. Все остальные точки называются *неособыми*.

Особая точка системы (10) называется *изолированной*, если в некоторой окрестности ее нет других особых точек этой системы.

Точка $(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$ будет, например, особой точкой системы (10), если в этой точке все правые части системы (10) обращаются в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Такую особую точку будем называть *особой точкой типа* $\frac{0}{0}$.

Пример 1. Для системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{x-z}{z-y},\\ \frac{dz}{dx}&=\frac{y-x}{z-y}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

любая точка прямой $x=y=z$ является особой точкой типа $\frac{0}{0}$.

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=x+\frac{2}{x}y-\sqrt{z},\\ \frac{dz}{dx}&=2\sqrt{z}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Здесь все точки плоскости (x, y) особые, так как в них не выполнено условие Липшица (ибо производные по z от правых частей системы обращаются в бесконечность при $z=0$).

Дадим теперь понятие о **точках равновесия** системы дифференциальных уравнений.

Пусть (x_0, y_0) есть особая точка типа $\frac{0}{0}$ для уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

т. е.

$$P(x_0, y_0)=Q(x_0, y_0)=0.$$

Рассмотрим **стационарную** систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=Q(x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=P(x, y),\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

где t — время, а x и y — координаты точки на фазовой плоскости (x, y). Так как в точке (x_0, y_0) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются в нуль, то система (13) имеет решение $x\equiv x_0$, $y\equiv y_0$ — **состояние покоя**. Такая точка (x_0, y_0) называется *точкой равновесия (покоя)* системы (13).

Система (13) *равносильна* уравнению (2) в том смысле, что каждая интегральная кривая уравнения (2) является траекторией системы (13) на фазовой плоскости (x, y) и обратно каждая траектория системы (13) на фазовой плоскости (x, y), отличная от точки равновесия $x=x_0$, $y=y_0$, есть интегральная кривая уравнения (2).

Из сказанного ясно, что *точка равновесия системы* (13) *является, вообще говоря, особой точкой типа* $\frac{0}{0}$ *соответствующего ей уравнения* (2). В связи с этим часто точки равновесия системы (13) называют *особыми* точками этой системы.

Отметим, что к точке равновесия (x_0, y_0) системы (13) могут асимптотически приближаться движения

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{14}$$

отличные от состояния равновесия, т. е. $x(t) \not\equiv 0$, $y(t) \not\equiv 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty\ (-\infty)} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty\ (-\infty)} y(t) = 0. \tag{15}$$

Пример 3. Дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Начало координат является неособой изолированной* точкой равновесия этой системы. Кроме очевидного движения $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, проходящего через точку равновесия (0, 0), система (16) определяет бесчисленное множество движений

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-t}, \tag{17}$$

стремящихся к состоянию равновесия $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ при $t \to +\infty$.

Сказанное легко переносится на стационарную систему n уравнений. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ фазового пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой все правые части системы (18) одновременно обращаются в нуль:

$$\left.\begin{aligned} X_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ X_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

называется *точкой равновесия (покоя)* системы (18). Исключая из системы (18) время t, мы получим систему $n-1$ уравнений, для которой точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ будет особой точкой типа $\frac{0}{0}$.

---

* Точка равновесия называется изолированной, если в некоторой окрестности ее нет других точек равновесия.

Точка равновесия системы (18) является, вообще говоря, **особой точкой** *(точкой неопределенности)* соответствующей ей системы дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \quad (20)$$

Данное выше определение точки равновесия распространяется и на систему, правые части которой явно содержат время. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, в которой при всех $t \geqslant t_0$ правые части системы (21) одновременно обращаются в нуль:

$$\left.\begin{aligned} X_1(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ X_2(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

называется *точкой равновесия (покоя)* системы (21).

Исследование поведения траекторий нормальной системы дифференциальных уравнений в окрестности точки равновесия составляет одну из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений.

При этом исследовании обычно считают, что рассматриваемая точка равновесия находится в начале координат, т. е. полагают

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \ \ldots, \ x_n^{(0)} = 0,$$

ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи подстановки:

$$\xi_1 = x_1 - x_1^{(0)}, \quad \xi_2 = x_2 - x_2^{(0)}, \ \ldots, \ \xi_n = x_n - x_n^{(0)}. \quad (23)$$

Вопрос о поведении траекторий нормальной системы дифференциальных уравнений (21) в окрестности точки равновесия

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0 \quad (24)$$

тесно связан с вопросом об устойчивости (в смысле Ляпунова) нулевого решения (невозмущенного движения):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0, \tag{25}$$

определяемого этой системой.

141. Поведение интегральных кривых уравнения с дробно-линейной однородной правой частью в окрестности особой точки *.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \tag{26}$$

где a, b, c, d — постоянные вещественные числа, причем $ad - bc \neq 0$**. Для этого уравнения точка $x = 0$, $y = 0$ является единственной изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$.

Так как в точке $x=0$, $y=0$ поле направлений не определено, то мы считаем, что через нее не проходит ни одна интегральная кривая уравнения (26)***.

Если мы заменим уравнение (26) равносильной ему системой двух линейных уравнений ****:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

то мы увидим, что особая точка $x=0$, $y=0$ уравнения (26) является точкой равновесия системы (27). Движение, начинающееся в этой точке, сводится к состоянию покоя

$$x = 0, \quad y = 0. \tag{28}$$

Но, как мы уже отметили выше, могут существовать движения $x=x(t)$, $y=y(t)$, начинающиеся в неособых точках и стремящиеся к состоянию покоя при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$)

$$\lim_{t \to +\infty\ (-\infty)} x(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty\ (-\infty)} y(t) = 0. \tag{29}$$

О траекториях таких движений на фазовой плоскости (x, y) мы будем говорить, что они *примыкают* к особой точке $(0, 0)$.

* См. также: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 1953, стр. 76—84. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, стр. 88—98.

** В противном случае правая часть уравнения (26) обратится в постоянную.

*** См. п. 4

**** Система (27) равносильна уравнению (26), в том смысле, что траекториями движений, определяемых системой (27) и отличных от состояния покоя, являются интегральные кривые уравнения (2) [140]

Таким образом, *вопрос о наличии движений, определяемых системой* (27) *отличных от состояния покоя и стремящихся к состоянию покоя, равносилен вопросу о наличии интегральных кривых уравнения* (26), *примыкающих к особой точке* $x=0$, $y=0$.

Вопрос о наличии периодических решений системы (27) *тесно связан с вопросом о существовании замкнутых интегральных кривых уравнения* (26).

Вопрос об устойчивости невозмущенного движения (28) также, как мы увидим в дальнейшем, *тесно связан с вопросом о поведении интегральных кривых уравнения* (26) *в окрестности особой точки.*

Говоря о поведении интегральных кривых уравнения (26) в окрестности особой точки, мы имеем в виду следующие вопросы: примыкают ли интегральные кривые (все или часть из них) к особой точке, если да, то с определенным (для каждой кривой) направлением (направлением касательной к интегральной кривой в особой точке) или же без определенного направления, если с определенным направлением, то имеет ли каждая интегральная кривая, примыкающая к особой точке, свое направление или все интегральные кривые, или хотя бы часть их, имеют одно и то же направление, и тогда, какое именно; если интегральные кривые не примыкают к особой точке, то лежит ли каждая из них в некоторой ограниченной части плоскости или нет?

С целью облегчения изучения качественной картины поведения интегральных кривых уравнения (26) в окрестности особой точки, упростим это уравнение при помощи линейного преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где α, β, γ, δ — некоторые постоянные вещественные числа, причем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$*. Это преобразование переводит окрестность особой точки $x=0$, $y=0$ уравнения (26) в окрестность особой точки $\xi=0$, $\eta=0$ преобразованного уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{c_1\xi + d_1\eta}, \tag{26'}$$

причем (в силу условия $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) так, что качественная картина поведения интегральных кривых остается без изменения.

---

* Такое линейное преобразование, т. е. преобразование с определителем, отличным от нуля, называется *неособенным.*

Попытаемся выбрать коэффициенты преобразования (30) α, β, γ и δ так, чтобы преобразованное уравнение (26') имело вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}, \tag{31}$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые постоянные числа.

Вычисляя дифференциалы от левых и правых частей формул (30), имеем:

$$d\xi = \alpha\, dx + \beta\, dy,$$
$$d\eta = \gamma\, dx + \delta\, dy.$$

Поэтому:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma\, dx + \delta\, dy}{\alpha\, dx + \beta\, dy}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части на dx и заменим отношение $\frac{dy}{dx}$ его значением из уравнения (26). Получим:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma + \delta\, \frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta\, \frac{dy}{dx}} = \frac{\gamma + \delta\, \frac{ax + by}{cx + dy}}{\alpha + \beta\, \frac{ax + by}{cx + dy}}$$

или

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma\,(cx + dy) + \delta\,(ax + by)}{\alpha\,(cx + dy) + \beta\,(ax + by)}.$$

Очевидно, что правая часть этого уравнения примет в результате преобразования (30) искомый вид $\frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}$, если числа α, β, γ, δ — коэффициенты преобразования (30) — выбрать так, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\gamma\,(cx + dy) + \delta\,(ax + by)}{\alpha\,(cx + dy) + \beta\,(ax + by)} = \frac{\lambda_1\,(\gamma\, x + \delta\, y)}{\lambda_2\,(\alpha\, x + \beta\, y)}. \tag{32}$$

Это тождество будет наверное выполнено, если

$$\left.\begin{aligned} \gamma\,(cx + dy) + \delta\,(ax + by) &= \lambda_1\,(\gamma\, x + \delta\, y), \\ \alpha\,(cx + dy) + \beta\,(ax + by) &= \lambda_2\,(\alpha\, x + \beta\, y). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Приравнивая коэффициенты при x и y, получаем две системы:

$$\left.\begin{aligned} (c - \lambda_1)\,\gamma + \qquad\quad a\,\delta &= 0, \\ d\,\gamma + (b - \lambda_1)\,\delta &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} (c - \lambda_2)\,\alpha + \qquad\quad a\,\beta &= 0, \\ d\,\alpha + (b - \lambda_2)\,\beta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Эти системы имеют ненулевые решения, если λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{36}$$

которое, раскрывая определитель, можно записать следующим образом:

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0. \tag{36'}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для уравнения (26), а его корни — *характеристическими числами**.

Если характеристическое уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2, то, решая системы (34) и (35), мы и найдем искомые числа α, β, γ и δ, причем условие $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ будет выполнено.

Действительно, в уравнении (26) коэффициенты a и d не равны нулю одновременно [в противном случае это уравнение уже имеет вид (31)]. Пусть $a\neq 0$. Тогда из первых уравнений (34) и (35) находим:

$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{c-\lambda_1}{a}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{c-\lambda_2}{a}.$$

Отсюда, в силу того, что $\lambda_1\neq\lambda_2$, получаем: $\frac{\delta}{\gamma}\neq\frac{\beta}{\alpha}$ или $\alpha\delta - \beta\gamma\neq 0$.

Итак, *в случае различных корней** характеристического уравнения, уравнение* (26) *при помощи подстановки вида* (30) *приводится к более простому уравнению* (31)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}.$$

Поведение интегральных кривых этого уравнения в окрестности особой точки $\xi=0$, $\eta=0$ зависит от характера корней характеристического уравнения.

Первый случай. λ_1 и λ_2 — вещественные и одного знака. Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1>\lambda_2>0$. Интегрируя уравнение (31), получаем:

$$\ln|\eta| = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln|\xi| + \ln|C_1| \quad (\xi\neq 0,\ \eta\neq 0), \quad \eta = 0 \quad (\xi\neq 0)$$

или

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi\neq 0,\quad C=\pm|C_1|). \tag{37}$$

* В данном случае характеристические числа не равны нулю, ибо $bc-ad\neq 0$.

** Случай кратных корней мы рассматриваем далее.

Так как наряду с уравнением (31) мы должны рассматривать и перевернутое уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_2 \xi}{\lambda_1 \eta}, \tag{31'}$$

то $\xi=0$ $(\eta \neq 0)$, т. е. положительная и отрицательная части оси $O\eta$, являются интегральными кривыми уравнения (31). Эти интегральные кривые содержатся, впрочем, и в формуле (37) при $C=\infty$.

Все интегральные кривые (37) примыкают к особой точке. Действительно, мы имеем:

$$\lim_{\xi \to 0} \eta = 0. \tag{38}$$

Интегральные кривые $\xi=0$ $(\eta \neq 0)$, очевидно, тоже примыкают к особой точке.

Таким образом, все интегральные кривые уравнения (31) примыкают к особой точке. (Здесь мы существенно воспользовались тем, что λ_1 и λ_2 — величины одного знака).

Выясним теперь вопрос о направлениях, под которыми интегральные кривые примыкают к особой точке. Для интегральных кривых семейства (37) имеем:

$$\eta'_\xi = \pm C \frac{\lambda_1}{\lambda_2} |\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} \quad (\xi \neq 0). \tag{39}$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, то $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 > 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\xi \to 0} \eta'_\xi = 0, \tag{40}$$

так что все эти интегральные кривые примыкают к особой точке с определенным и притом одним и тем же направлением (все они в особой точке касаются оси $O\xi$). Интегральные кривые $\xi=0$ $(\eta \neq 0)$ примыкают к особой точке тоже с определенным направлением (вдоль оси $O\eta$), но отличным от направления интегральных кривых (37).

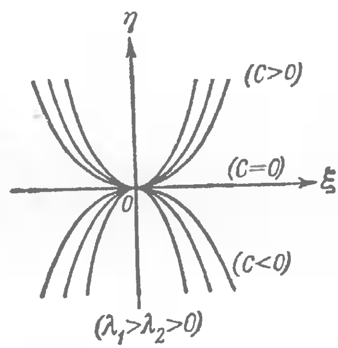


Рис. 38

Итак, *в рассматриваемом случае все интегральные кривые уравнения* (31) *примыкают к особой точке* $\xi=0$, $\eta=0$ *и притом с определенным направлением.* Особая точка такого типа называется *узлом* (рис. 38).

Так как в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ исходного уравнения (26) мы будем иметь ту же качественную картину расположения интегральных кривых, то особая точка $x=0$, $y=0$ уравнения (26) также называется *узлом*.

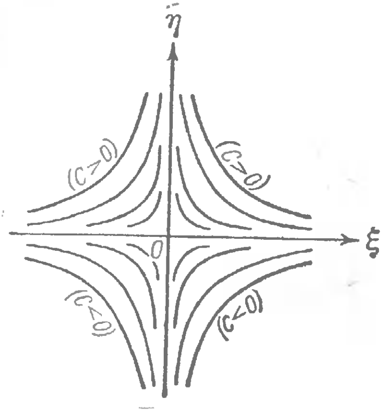


Рис. 39

Второй случай. λ_1 и λ_2 — вещественные и разных знаков. В этом случае только четные интегральные кривые $\eta=0$ $(\xi\neq 0)$, $\xi=0$ $(\eta\neq 0)$ примыкают к особой точке, все же остальные интегральные кривые, как показывает формула (37), не примыкают к особой точке, т. е. η не стремится к нулю, когда $\xi\to 0$. При этом каждая из этих интегральных кривых обладает тем свойством, что при $\xi\to 0$ точка (ξ, η), лежащая на ней, сначала приближается к особой точке $(0, 0)$, а затем начинает от нее удаляться. Особая точка такого типа называется *седлом* (рис. 39). В этом случае особая точка $x=0$, $y=0$ уравнения (26) также называется *седлом*.

Таким образом, *в случае различных вещественных характеристических чисел мы имеем либо узел, либо седло.* Рассмотрим теперь случай комплексных характеристических чисел.

Третий случай. λ_1 и λ_2 — комплексные, но не чисто мнимые, $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$ $(p\neq 0)$. Уравнение (31) принимает в этом случае вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{p+iq}{p-iq}\cdot\frac{\eta}{\xi}. \tag{41}$$

Найдем α и β из системы (35), где $\lambda_2=p-iq$. Затем, считая $a\neq 0$ и полагая в системе (34) $\gamma=\bar{\alpha}$*, найдем, пользуясь системой (35), что

$$\delta=-\frac{c-\lambda_1}{a}\bar{\alpha}=-\frac{c-\bar{\lambda}_2}{a}\bar{\alpha}=\bar{\beta}. \tag{42}$$

Поэтому мы можем записать преобразование (30) в нашем случае так:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\alpha x+\beta y,\\ \eta&=\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

---

* Через $\bar{z}$ мы обозначаем комплексное число, сопряженное с z.

Здесь ξ и η — комплексные, причем $\eta = \bar{\xi}$. Желая иметь дело с вещественными переменными, сделаем подстановку:

$$\xi = u + iv, \qquad \eta = u - iv, \tag{44}$$

где u и v — вещественные переменные. Тогда уравнение (41) перепишется так:

$$\frac{du - i\,dv}{du + i\,dv} = \frac{(p + iq)\ (u - iv)}{(p - iq)\ (u + iv)}, \tag{45}$$

или

$$(du - i\,dv)\,[pu + qv + i\,(pv - qu)] = \\ = (du + i\,dv)\,[pu + qv + i\,(qu - pv)].$$

Замечая, что это равенство имеет вид $\bar{z} = z$ и приравнивая нулю мнимые части, придем к уравнению

$$(pv - qu)\ du - (pu + qv)\ dv = 0. \tag{46}$$

Интегрируя это уравнение, находим*:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\ \mathrm{arctg}\ \frac{v}{u}}. \tag{47}$$

Полученная формула содержит все решения уравнения (46).

Полагая

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi, \tag{48}$$

где r и φ — полярные координаты, мы можем переписать семейство интегральных кривых (47) в виде

$$r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}. \tag{49}$$

Это логарифмические спирали на плоскости (u, v). Из формулы (49) видно, что все интегральные кривые уравнения (46) примыкают к особой точке $u=0$, $v=0$ (рис. 40) при $\varphi \to +\infty$, если p и q одного знака (или при $\varphi \to -\infty$, если p и q противоположных знаков), но не имеют в ней определенного направления. Все интегральные кривые (49) бесконечное число раз обходят особую точку в одном и том же направлении, асимптотически приближаясь к ней. Та же качественная картина будет иметь место и в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ исходного уравнения (26). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

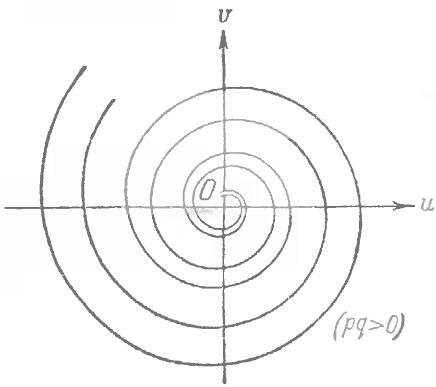


Рис. 40

* См. п. **61**, формула (40).

Четвертый случай. λ_1 и λ_2 чисто мнимые: $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$. Полагая в (47) $p = 0$, получим:

$$u^2 + v^2 = C^2. \tag{50}$$

Отсюда видно, что все интегральные кривые уравнения (46), где $p = 0$, суть окружности с центром в особой точке $u = 0$, $v = 0$, а интегральные кривые уравнения (26) суть эллипсы, окружающие особую точку $x = 0$, $y = 0$. В этом случае особая точка называется *центром* (рис. 41).

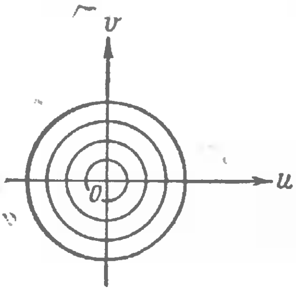


Рис. 41

Итак, *в случае различных характеристических чисел мы имеем четыре возможных типа особой точки: узел седло, фокус и центр.*

Рассмотрим теперь случай кратных характеристических чисел. В этом случае имеем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2}.$$

Система (35) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{c-b}{2}\,\alpha + a\beta = 0,\\ d\alpha + \frac{b-c}{2}\,\beta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

причем определитель этой системы равен нулю по самому выбору числа λ. Поэтому имеем:

$$(b-c)^2 + 4ad = 0^*. \tag{52}$$

Возможны два случая.

1. Система (51) не тождественная, т. е. не все коэффициенты ее равны нулю Предположим, что $a \neq 0$. Тогда, положив $\alpha = a$, получим $\beta = \frac{b-c}{2}$.

Сделаем теперь в уравнении (26) подстановку:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}\,y,\\ \eta &= \qquad\qquad y. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

---

* Это равенство легко получить и непосредственно из условия

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - (bc - ad) = 0,$$

которое в нашем случае, очевидно, выполнено.

Тогда будем иметь:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dy}{a\,dx+\frac{b-c}{2}\,dy}=\frac{\frac{dy}{dx}}{a+\frac{b-c}{2}\cdot\frac{dy}{dx}}=\frac{\frac{ax+by}{cx+dy}}{a+\frac{b-c}{2}\cdot\frac{ax+by}{cx+dy}}=$$

$$=\frac{ax+by}{a(cx+dy)+\frac{b-c}{2}(ax+by)}=\frac{ax+\frac{b-c}{2}\,y+\frac{b+c}{2}\,y}{\left(ac+\frac{b-c}{2}\,a\right)x+\left(ad+\frac{b-c}{2}\,b\right)y}=$$

$$=\frac{ax+\frac{b-c}{2}\,y+\frac{b+c}{2}\,y}{\frac{b+c}{2}\,ax+\left[-\frac{(b-c)^2}{4}+\frac{b-c}{2}\,b\right]y}=$$

$$=\frac{ax+\frac{b-c}{2}\,y+\frac{b+c}{2}\,y}{\frac{b+c}{2}\,ax+\frac{b^2-c^2}{4}\,y}=\frac{\left(ax+\frac{b-c}{2}\,y\right)+\frac{b+c}{2}\,y}{\frac{b+c}{2}\left(ax+\frac{b-c}{2}\,y\right)}=\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\lambda_1\xi}. \qquad (54)$$

Таким образом, преобразование (53) приводит уравнение (26) к уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\lambda_1\xi} \qquad (55)$$

с особой точкой $\xi=0$, $\eta=0$.

Выясним характер поведения интегральных кривых уравнения (55) в окрестности этой особой точки.

Интегрируя уравнение (55), перепишем его так:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\eta}{\xi}.$$

Рассматривая это уравнение как однородное, полагаем $\eta=z\xi$. Тогда получим

$$\frac{dz}{d\xi}\,\xi=\frac{1}{\lambda_1},$$

откуда

$$z=\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi|+C,$$

и, следовательно, общим решением уравнения (55) будет:

$$\eta=\xi\left(C+\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi|\right) \quad (\xi\neq 0). \qquad (56)$$

Все интегральные кривые, определяемые формулой (56), примыкают к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$ (рис. 42, $\lambda_1>0$), входя в нее с одним и тем же направлением (вдоль оси $O\eta$), ибо

$$\lim_{\xi \to 0} \eta'_\xi = \pm \infty \tag{57}$$

(знак противоположен знаку λ).

Очевидно, что обе части оси $O\eta$ также являются интегральными кривыми, входящими в особую точку $\xi=0$, $\eta=0$ и притом с тем же направлением, что и интегральные кривые (56).

Следовательно, в рассматриваемом случае особая точка $\xi=0$, $\eta=0$ уравнения (55) и соответственно особая точка $x=0$, $y=0$

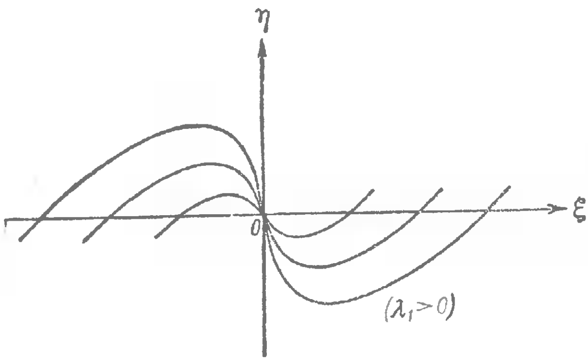


Рис. 42

уравнения (26) является у з л о м. Такой узел называется *вырожденным узлом:* в с е и н т е г р а л ь н ы е к р и в ы е у р а в н е н и я (55) п р и м ы к а ю т к о с о б о й т о ч к е $\xi=0$, $\eta=0$ с о д н и м и т е м ж е н а п р а в л е н и е м, в то время как в случае обыкновенного узла (рис. 38) две интегральные кривые уравнения (31), а именно полуоси оси $O\eta$, примыкали к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$ с направлением, отличным от направления всех других интегральных кривых.

2. С и с т е м а (51) т о ж д е с т в е н н а я. В этом случае $a=0$, $b=c$, $d=0$, так что исходное уравнение (26) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{58}$$

Все интегральные кривые даются формулами:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx \quad (x \neq 0), \\ x &= 0 \quad (y \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Все они примыкают к особой точке $x=0$, $y=0$ с определенным (для каждой кривой) направлением, так что особая точка является **у з л о м**. В отличие от ранее рассмотренных случаев узла, здесь к а ж д а я и н т е г р а л ь н а я к р и в а я п р и м ы к а е т к о с о б о й т о ч к е с о с в о и м н а п р а в л е н и е м. Такой узел называется *дикритическим (особым) узлом* (рис. 43).

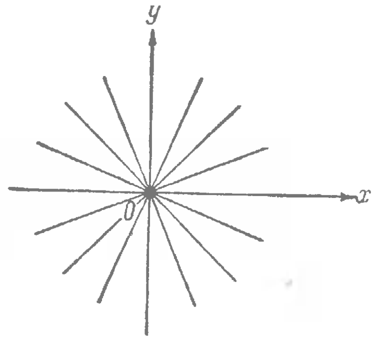


Рис. 43

Обратимся снова к системе (27):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= cx + dy,\\ \frac{dy}{dt} &= ax + by,\end{aligned}\right\}^{*}$$

соответствующей рассмотренному уравнению (26).

Мы будем называть т о ч к у р а в н о в е с и я $x=0$, $y=0$ этой системы *узлом, седлом, фокусом* или *центром,* если для уравнения (26) точка $x=0$, $y=0$ является соответственно узлом, седлом, фокусом или центром.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (36'')$$

называется *характеристическим уравнением* этой системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения $x\equiv0$ $y\equiv0$ системы (27) в предположении, что $ad-bc\neq0$, т. е. что у р а в н е н и е (36″) н е и м е е т н у л е в ы х к о р н е й. Решение этого вопроса зависит от вида корней характеристического уравнения.

Если к о р н и у р а в н е н и я (36″) λ_1 и λ_2 р а з л и ч н ы и в е щ е с т в е н н ы, то при помощи неособенного линейного преобразования (30) система (27) может быть приведена к виду**

---

* См.: В. В. Н е м ы ц к и й и В. В. С т е п а н о в. Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949, стр. 84—93; Л. Э. Э л ь с г о л ь ц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957, стр. 186—193; Л. С. П о н т р я г и н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965, стр. 115—127.

** Система (60) соответствует уравнению (31); она получается из этого уравнения, если переписать его в виде $\dfrac{d\eta}{\lambda_1\eta} = \dfrac{d\xi}{\lambda_2\xi} = dt$ (стр. 117 (22)).

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_2 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_1 \eta. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Общее решение системы (60) имеет вид:

$$\xi = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = C_1 e^{\lambda_1 t} \tag{61}$$

или (в форме Коши)

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda_1 t}. \tag{62}$$

Если λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака, то из формул (62) следует, что при отрицательных λ_1 и λ_2 нулевое решение $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ системы (60) будет асимптотически устойчиво, а при положительных λ_1 и λ_2 оно будет неустойчивым.

Действительно, если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то решение $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ устойчиво, причем $\delta = \varepsilon$*. Кроме того, из формул (62) видно, что $\xi \to 0$, $\eta \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, в этом случае решение $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ асимптотически устойчиво. Если же $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то из формул (62) видно, что решение $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (60), изображены схематически на рис. 44 **.

Так как преобразование (30) неособенное, то нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (27) будет иметь такой же характер устойчивости (почему?).

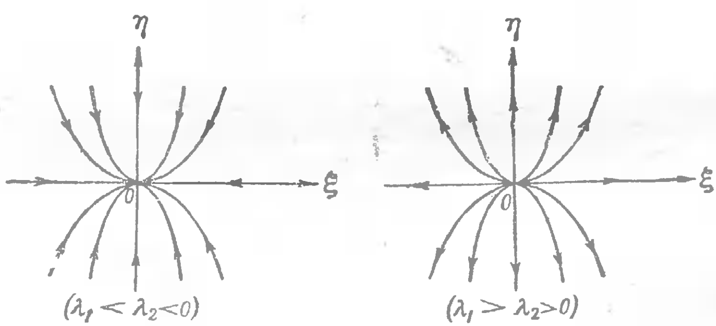


Рис. 44

Таким образом, *в случае узла невозмущенное движение* $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, *будет асимптотически устойчиво, если оба корня харак-*

* Ср. п. 133, пример. 4.

** Здесь, и во всех последующих рисунках, стрелки указывают направление движения по траектроии при возрастании времени t.

теристического уравнения отрицательны, и неустойчиво, если оба корня положительны.

Если λ_1 и λ_2 вещественны и знаки их противоположны, то из формул (62) следует, что решение $\xi=0$, $\eta=0$ системы (60) неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (60), в рассматриваемом случае изображены схематически на рис. 45.

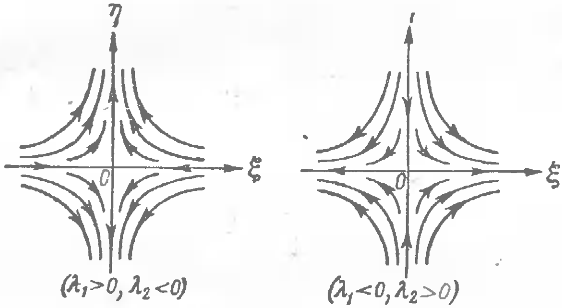


Рис. 45

Решение $x=0$, $y=0$ системы (27) также будет неустойчиво (почему?).

Таким образом, *в случае седла невозмущенное движение $x=0$, $y=0$ будет неустойчивым.*

Если λ_1 и λ_2 — комплексные, но не чисто мнимые, т. е. $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$ $(p\neq 0)$, то система (27) при помощи неособенных линейных преобразований (43) и (44) может быть приведена к виду *

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= pu+qv, \\ \frac{dv}{dt} &= -qu+pv. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Система (63) имеет согласно (47) первый интеграл

$$\sqrt{u^2+v^2}=C_1 e^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}},$$

не зависящий от t. Этому первому интегралу соответствует однопараметрическое семейство траекторий на фазовой плос-

---

* Эта система соответствует уравнению (46). Переписав (46) в виде $\frac{du}{pu+qv}=\frac{dv}{pv-qu}=dt$, мы и придем к системе (63).

кости (u, v), которые представляют собою логарифмические спирали (рис. 40),

$$r = C_1 e^{-\frac{p}{q}\varphi}, \tag{64}$$

где $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$.

Найдем другой первый интеграл [он будет содержать явно время t (почему?)]. Умножая первое из уравнений (63) на u, второе на v и складывая почленно, получим:

$$u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} = p(u^2 + v^2) \quad \text{или} \quad \frac{d(u^2+v^2)}{dt} = 2p(u^2 + v^2),$$

откуда

$$u^2 + v^2 = C_2 e^{2pt}. \tag{65}$$

Из найденных первых интегралов (64) и (65) виден характер движений, определяемых системой (63).

Переписав (65) в виде

$$u^2 + v^2 = (u_0^2 + v_0^2)\, e^{2pt},$$

где $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$, заключаем, что при $p < 0$ нулевое решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ системы (63) устойчиво и притом асимптотически. Если же $p > 0$, то решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (63), изображены схематически на рис. 46.

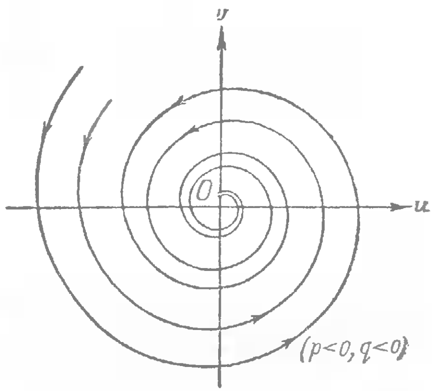


Рис. 46

Нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (27) также будет асимптотически устойчивым при $p < 0$ и неустойчивым при $p > 0$.

Таким образом, *в случае фокуса невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ будет асимптотически устойчиво, если характеристические числа имеют отрицательную вещественную часть и неустойчиво, если последняя положительна.*

Если характеристические числа чисто мнимые, т. е. $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$, то система (63) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= qv, \\ \frac{dv}{dt} &= -qu. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Эта система имеет первый интеграл

$$u^2 + v^2 = C_1^2 \quad \text{или} \quad u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2, \tag{67}$$

откуда видно, что нулевое решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ устойчиво, но неасимптотически. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (66), изображены схематически на рис. 47.

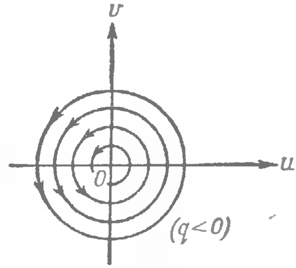


Рис. 47

Нулевое решение $x=0$, $y=0$ системы (27) будет также неасимптотически устойчиво.

Таким образом, *в случае центра невозмущенное движение* $x=0$, $y=0$ *неасимптотически устойчиво.*

Наконец, в случае к р а т н ы х корней характеристического уравнения следует различать две возможности.

1. Система (27) преобразуется в такую:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \lambda_1 \eta. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

В этом случае точка $\xi=0, \eta=0$, а следовательно и точка равновесия $x=0$, $y=0$ системы (27) является в ы р о ж д е н н ы м у з л о м. Интегрируя последовательно уравнения системы (68), находим, что ее общее решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta &= e^{\lambda_1 t}(C_2 + C_1 t) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

или (в форме Коши)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta &= e^{\lambda_1 t}(\eta_0 + \xi_0 t). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Отсюда видно, что решение $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ асимптотически устойчиво, если $\lambda_1 < 0$ и неустойчиво при $\lambda_1 > 0$. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (68), изображены схематически на рис. 48 ($\lambda_1 > 0$).

Невозмущенное движение $x=0$, $y=0$, *определяемое системой* (27), *будет асимптотически устойчиво при* $\lambda_1 < 0$ *и неустойчиво при* $\lambda_1 > 0$.

2. Система (27) имеет вид*

---

* Это соответствует случаю, когда система (51) тождественная.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= bx, \\ \frac{dy}{dt} &= by. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Точка $x=0$, $y=0$ есть **дикритический узел**. Из общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{bt}, \\ y &= C_2 e^{bt} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

или (в форме Коши)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{bt}, \\ y &= y_0 e^{bt} \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

видно, что *невозмущенное движение $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво при $b<0$ и неустойчиво при $b>0$*. Траектории

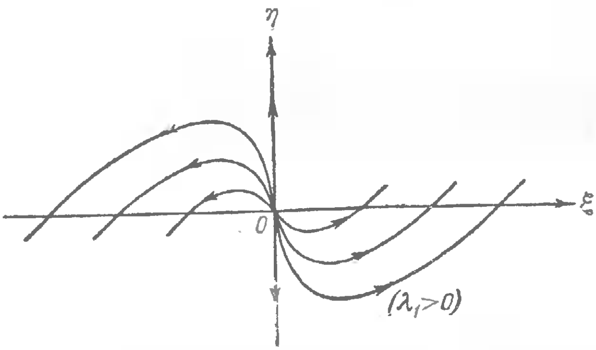


Рис. 48

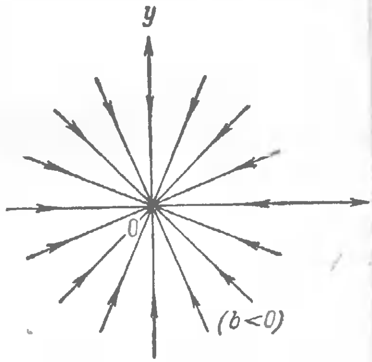


Рис. 49

возмущенных движений, определяемых системой (71) в случае $b<0$ изображены схематически на рис. 49.

142. Один физический пример. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массы m по оси Ox. Уравнение этого движения имеет вид**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{74}$$

где f — сила, действующая на точку. Это уравнение можно привести к системе двух уравнений первого порядка **:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{m} f(t,\ x,\ x_1). \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

* Ср. п. 84 уравнение (10).
** Ср. п. 113 система (122).

Предположим*, что на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости:

$$-a\frac{dx}{dt}$$

и сила

$$-bx,$$

притягивающая ее к началу координат. Коэффициенты a и b постоянны, $a\geqslant 0$, $b>0$. Например, это будет иметь место в задаче о вертикальных колебаниях тела массы m, подвешенного на пружине, около положения равновесия $x=0$, если считать, что упругая сила пружины действует в сторону положения равновесия и пропорциональна удалению x от положения равновесия и что колебание происходит в среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости и имеет направление, обратное направлению скорости**.

При сделанных предположениях уравнение (74) примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}-bx \tag{76}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0, \tag{77}$$

где $h=\dfrac{a}{2m}\geqslant 0$, $k^2=\dfrac{b}{m}>0$, а соответствующей ему системой уравнений будет

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x_1,\\ \frac{dx_1}{dt}&=-k^2x-2hx_1.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Точке равновесия $x=0$, $x_1=0$ этой системы соответствует особая точка $x=0$, $x_1=0$ уравнения

$$\frac{dx_1}{dx}=\frac{-k^2x-2hx_1}{x_1}. \tag{79}$$

Изучив поведение решений системы (78) или уравнения (79)

---

*См.: И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, стр. 198.

**См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 99.

в окрестности точки $x=0$, $x_1=0$, мы тем самым изучим поведение решений системы (78) относительно нулевого решения $x\equiv 0$, $x_1\equiv 0$, а следовательно, и поведение решений уравнения (77) относительно нулевого решения $x\equiv 0$.

Характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 & -2h-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2+2h\lambda+k^2=0. \tag{80}$$

Характер корней этого уравнения

$$\lambda_{1,\,2} = -h \pm \sqrt{h^2-k^2} \tag{81}$$

зависит от соотношения между упругой силой пружины и силой сопротивления среды.

Рассмотрим сначала случай $h=0$, т. е. когда колебания происходят в среде без сопротивления. В этом случае λ_1 и λ_2 чисто мнимые. Особая точка $x=0$, $x_1=0$ является центром. Невозмущенное решение $x\equiv 0$, $x_1\equiv 0$ системы (78), где $h=0$ неасимптотически устойчиво. *Всякое решение уравнения* (77), *где* $h=0$, *ограничено при всех значениях* t.

Предположим теперь, что $h>0$, т. е. колебание происходит в среде с сопротивлением. Здесь возможны три случая.

Случай 1: $h^2-k^2>0$. В этом случае оба корня λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (80) вещественны и отрицательны (ибо $h>0$). Особая точка $x=0$, $x_1=0$ — узел. Нулевое решение $x\equiv 0$, $x_1\equiv 0$ системы (78) асимптотически устойчиво. *Всякое решение уравнения* (77) *будет стремиться к нулевому решению* $x\equiv 0$ *при* $t\to+\infty$.

Случай 2: $h^2=k^2$. Здесь $\lambda_1=\lambda_2=-h<0$. Особая точка $x=0$, $x_1=0$ — вырожденный узел. Нулевое решение $x\equiv 0$, $x_1\equiv 0$ асимптотически устойчиво. *Любое решение уравнения* (77) *стремится к нулевому решению* $x\equiv 0$ *при* $t\to+\infty$.

Случай 3: $h^2-k^2<0$. В этом случае λ_1 и λ_2 будут комплексными сопряженными, но не чисто мнимыми, ибо $h\neq 0$. Особая точка $x=0$, $x_1=0$ будет фокусом. Нулевое решение $x\equiv 0$, $x_1\equiv 0$ асимптотически устойчиво, ибо вещественная часть характеристических чисел λ_1 и λ_2 отрицательна. *Всякое решение уравнения* (77) *будет стремиться к нулевому решению* $x\equiv 0$ *при* $t\to+\infty$.

Мы получили качественную характеристику решения уравнения (77) и соответствующей ему системы (78), не интегрируя их. В п. **180** мы получаем те же (и некоторые дополнительные) результаты, используя формулу общего решения уравнения (77).

143. Понятие о проблеме центра и фокуса*. В п. **141** мы рассмотрели поведение интегральных кривых уравнения (26)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}\quad (ad-bc\neq 0)$$

и равносильной ему системы (27),

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=cx+dy,\\ \frac{dy}{dt}&=ax+by.\end{aligned}\right\}$$

При этом качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки $x=0,\ y=0$ вполне определялась корнями характеристического уравнения (36″):

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d\\ a & b-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Поставим теперь вопрос: сохранится ли качественная картина, если мы добавим в правой части уравнения (26) [или, что то же, в правых частях системы (27)] члены высших степеней относительно x и y? Естественно, что на этот вопрос в общем случае следует ожидать отрицательный ответ. Тогда возникает другой вопрос. В каких случаях и какие члены высших степеней или вообще какие функции от x и y, обращающиеся в нуль вместе с x и y, можно добавить, чтобы качественная картина не нарушалась? Те же вопросы возникают и относительно устойчивости невозмущенного движения.

Ответ на эти вопросы дают качественная теория дифференциальных уравнений и теория устойчивости движения.

Актуальность этих вопросов для приложений вытекает хотя бы из физического примера, рассмотренного в п. **142**, если предположить, что $f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ является нелинейной функцией относительно x и $\frac{dx}{dt}$ и имеет вид

$$f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)=-bx-a\frac{dx}{dt}+P\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{82}$$

где P — степенной ряд относительно x и $\frac{dx}{dt}$, не содержащий свободного члена и членов первой степени относительно x и $\frac{dx}{dt}$.

---

* См. также: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 167.

Оказывается, что *для системы вида*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + \psi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + \varphi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

где φ и ψ *в некоторой окрестности точки* $x=0$, $y=0$ *имеют непрерывные частные производные, причем* $\varphi(0, 0)=\psi(0, 0)=0$ *и*

$$\lim_{|x|+|y|\to 0} \frac{|\varphi'_x|+|\varphi'_y|+|\psi'_x|+|\psi'_y|}{(|x|+|y|)^{\alpha}}=0, \quad (\alpha>0),$$

качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки вполне определяется корнями характеристического уравнения (36″), *когда последние имеют вещественные части, отличные от нуля,* так что если при сделанных предположениях для *укороченной системы:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

мы имеем узел, седло или фокус, то то же самое мы будем иметь и для полной системы (83)*.

Указанные условия для φ и ψ будут в частности выполнены, если φ и ψ разлагаются в ряды по степеням x и y без свободных и линейных членов.

Если же корни характеристического уравнения (36″) *чисто мнимые, т. е. в случае, когда точка* $x=0$, $y=0$ *является центром для системы* (84), *мы не можем ручаться, что она будет центром и для системы* (83).

Более того, *для системы вида*

$$\frac{dx}{dt}=y+P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=-x+Q(x, y) \tag{85}$$

Пуанкаре** в случае, когда P и Q полиномы, не содержащие свободных и линейных членов, и Ляпуновым*** в случае, когда P и Q функции, разложения которых по степеням x и y начинаются членами не ниже второго измерения, показано, что

* См.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 1958, стр. 84—94. O. Perron. Mathematische Zeitschrift. т. 15. 1922; т. 16, 1923.

** А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, 1947.

*** А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, 1950, стр. 169. См. также: В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949, стр. 128—130.

особая точка $x=0$, $y=0$ может быть как центром, так и фокусом, в то время как для соответствующей укороченной системы

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x \tag{86}$$

эта особая точка является центром. При этом *расположение типа центр может быть нарушено добавлением к правым частям системы* (85) *или* (86) *членов сколь угодно высокого порядка.*

Возникает проблема установления аналитического критерия для отличия центра от фокуса. Эта проблема называется *проблемой центра и фокуса.*

А. М. Ляпунов дал общий метод различения центра и фокуса. Используя и развивая идеи А. М. Ляпунова, Н. А. Сахарников * довел до конца решение проблемы центра и фокуса для случая, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы второго порядка и решил ее для случая однородных полиномов третьего порядка. Проблема различения центра и фокуса решена также в случае, когда $P(x, y)\equiv 0$, а $Q(x, y)$ — полином третьей или пятой степени**.

Проблема различения центра и фокуса при наличии линейных членов в правых частях системы дифференциальных уравнений возникает не только в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения. Эта проблема, как показал А. М. Ляпунов *** может возникнуть и в случае нулевых корней характеристического уравнения, т. е. когда $ad-bc=0$. А именно, А. М. Ляпунов показал, что *для системы*

$$\frac{dx}{dt}=y+P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{87}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — степенные ряды, не содержащие свободных и линейных членов, при некоторых дополнительных условиях особая точка $x=0$, $y=0$ может быть центром или фокусом. При этом оказывается, что *в случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть полиномы второго порядка, особая точка $x=0$, $y=0$, не может быть ни центром, ни фокусом.*

---

* См. статьи Н. А. Сахарникова в журнале «Прикладная математика и механика»: Об условиях Фроммера существования центра (1948, вып. 5); Об условиях существования центра и фокуса (1950, вып. 5); Решение проблемы центра и фокуса в одном случае (1950, вып. 6). См. также: К. С. Сибирский. Инварианты линейных представлений группы вращений плоскости и проблема центра. ДАН СССР, 1963, 151, № 3; Н. А. Лукашевич. Интегральные кривые одного уравнения. Дифференциальные уравнения, 1965, № 1 и др.

** См. статьи И. С. Куклеса в ДАН СССР: О необходимых и достаточных условиях наличия центра (т. XII, 1944, № 4); О некоторых случаях отличия фокуса от центра (т. XII, 1944, № 5).

*** А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, 1950, стр. 369.

Продолжая исследования А. М. Ляпунова, А. Ф. Андреев * решил проблему центра и фокуса для системы вида (87) в случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными полиномами третьей степени.

Отметим, что *если в системе* (85) $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ *суть неаналитические функции* x *и* y (т. е. не степенные ряды), *удовлетворяющие условию*

$$\lim_{|x|+|y|\to 0} \frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{|x|+|y|\to 0} \frac{Q(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

то особая точка $x=0$, $y=0$ *может быть для этой системы центром, фокусом или центрофокусом* **.

То же самое имеет место при некоторых дополнительных условиях и для системы (87). Достаточные условия, при которых для этой системы возникает проблема центра, фокуса и центрофокуса, указаны в работе А. Ф. Андреева ***.

В пп. **141—143** мы рассмотрели вопрос о поведении интегральных кривых в окрестности точки равновесия и связанный с ним вопрос об устойчивости движения лишь для системы двух уравнений вида (27).

Рассмотрение того же вопроса для общего случая системы двух уравнений и системы n уравнений читатель может найти в трудах создателей качественной теории дифференциальных уравнений А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре, в работах Бендиксона и Фроммера ****, в работах Перрона, И. Г. Петровского ***** и др. ******.

* А. Ф. Андреев. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае. «Прикладная математика и механика», вып. 3, 1953.

** Т. е. в любой окрестности точки $x=0$, $y=0$ могут находиться как замкнутые траектории, так и спирали.

*** А. Ф. Андреев. Метод Фроммера и одно его приложение. Вестник ЛГУ, № 19, 1960.

**** Частичный перевод помещен в журнале «Успехи математических наук», вып. IX, 1941. В последние годы метод Фроммера получил значительное развитие в работах И. С. Куклеса и его учеников (И. С. Куклес. О методе Фроммера исследования особой точки. ДАН СССР, 117, 3, 1957) и А. Ф. Андреева (А. Ф. Андреев. Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Вестник ЛГУ, № 8, 1955; Метод Фроммера и одно его приложение. Вестник ЛГУ, № 19, 1960; О методе Фроммера исследования особой точки дифференциального уравнения первого порядка. Вестник ЛГУ, № 1, 1962; Теорема единственности для нормальной области Фроммера второго типа, ДАН СССР, 142, 6, 1962).

***** См.: И. Г. Петровский. О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки (Дополнение к гл. XVI книги: А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М. — Л., Гостехиздат, 1947, стр. 336—347).

****** См.: В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. См. также первую сноску на стр. 21.

§ 5. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА КОШИ)

144. Понятие о голоморфном решении. Теорема Пикара, рассмотренная в § 1, устанавливает условия, которые достаточно наложить на правые части нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

чтобы было обеспечено существование единственного решения задачи Коши, обладающего непрерывной производной первого порядка. Существование производных высшего порядка теорема Пикара не гарантирует. Правда, нетрудно показать, что *если правые части системы (1′) имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до p-го ($p \geqslant 1$) порядка, то всякое решение этой системы имеет непрерывные производные по x до $(p+1)$-го порядка.*

В самом деле, пусть $y_1 = y_1(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ есть решение системы (1′). При наших предположениях правые части системы (1′) имеют непрерывные производные по x (как сложные функции от x), а тогда и левые части имеют непрерывные производные по x. Поэтому существуют непрерывные производные второго порядка от y_1, ..., y_n по x, причем

$$\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_s} y_s' \; (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что если $p \geqslant 2$, то решение $y_1 = y_1(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ имеет непрерывную производную по x третьего порядка, т. е. $\frac{d^3y_k}{dx^3}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и непрерывны и т. д.

Если правые части системы (1′) имеют частные производные по всем аргументам любого порядка, то, согласно предыдущему, и всякое решение этой системы имеет производную по x любого порядка.

Если какое-либо решение $y_1 = y_1(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ системы (1′) не только имеет производные всех порядков, но функции, составляющие это решение, разлагаются в степенные ряды по степеням разности $(x - x_0)$, т. е.

$$y_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(k)} (x - x_0)^s \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

причем ряды справа сходятся при всех значениях x из интервала $|x - x_0| < \rho$, где ρ — некоторая положительная постоянная (может быть и $\rho = +\infty$), то это решение называется *голоморфным в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$.*

Вообще функция $f(x)$ называется *голоморфной в некоторой окрестности* $|x-x_0|<\rho$ *точки* $x=x_0$, если в этой окрестности она представима сходящимся степенным рядом по степеням разности $(x-x_0)$, т. е. если

$$f(x)=\sum_{s=0}^{\infty} c_s (x-x_0)^s,$$

причем ряд справа сходится в области $|x-x_0|<\rho$.

Таким образом, решение $y_1=y_1(x)$, ..., $y_n=y_n(x)$ называется голоморфным в некоторой окрестности точки $x=x_0$, если все функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ голоморфны в этой окрестности.

В настоящем параграфе мы докажем теорему Коши о существовании и единственности решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям и голоморфного в некоторой окрестности начального значения независимой переменной.

При этом нам понадобится понятие о голоморфной функции нескольких независимых переменных.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *голоморфной* относительно совокупности всех своих аргументов в некоторой окрестности

$$|x_1-x_1^{(0)}|<\rho_1, \quad |x_2-x_2^{(0)}|<\rho_2, \quad \ldots, |x_n-x_n^{(0)}|<\rho_n \tag{I}$$

точки $x_1=x_1^{(0)}$, $x_2=x_2^{(0)}$, ..., $x_n=x_n^{(0)}$, если в этой окрестности она представима сходящимся степенным рядом по степеням разностей $x_1-x_1^{(0)}$, $x_2-x_2^{(0)}$, ..., $x_n-x_n^{(0)}$, т. е. если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$

$$=\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1-x_1^{(0)})^{k_1}(x_2-x_2^{(0)})^{k_2}\ldots(x_n-x_n^{(0)})^{k_n},$$

причем ряд справа сходится в области (I).

145. Понятие о мажоранте. Прежде чем излагать доказательство теоремы Коши, введем понятие о м а ж о р а н т е, которая используется как при доказательстве теоремы Коши, так и во многих других вопросах теории дифференциальных уравнений.

Пусть даны два степенных ряда:

$$f(x, y, z)=\sum_{k, l, m=0}^{\infty} a_{klm}x^k y^l z^m \tag{II}$$

и

$$F(x, y, z)=\sum_{k, l, m=0}^{\infty} A_{klm}x^k y^l z^m, \tag{III}$$

причем коэффициенты ряда (II) имеют произвольные знаки, а все коэффициенты ряда (III) положительны и не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов ряда (II):

$$|a_{klm}| \leqslant A_{klm}.$$

Кроме того, предположим, что ряд (III) сходится в некоторой окрестности начала координат. Тогда ряд (III) называется *мажорантным (усиливающим) рядом* или *мажорантной для ряда* (II), а функция $F(x, y, z)$ называется *мажорирующей (усиливающей) функцией* или *мажорантной для функции* $f(x, y, z)$.

Аналогично вводится понятие о мажорантном ряде в случае любого числа независимых переменных.

Для всякого сходящегося ряда (II) *существует мажорантный ряд* (III) внутри интервала сходимости. Например, мы получим мажорантный ряд, если заменим все коэффициенты ряда (II) их абсолютными величинами.

Покажем, что *всегда можно построить мажорантный ряд, сумма которого будет элементарной функцией*, так что *для всякой функции, разлагающейся в степенной ряд, существует элементарная мажоранта.*

Пусть ряд (II) сходится в области

$$|x| < \rho, \quad |y| < r, \quad |z| < R.$$

Тогда при любых положительных числах ρ', r' и R', удовлетворяющих неравенствам $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, $0 < R' < R$, тройной ряд

$$\sum_{k,\, l,\, m=0}^{\infty} |a_{klm}|\, \rho'^k r'^l R'^m$$

будет сходящимся. Обозначим его сумму через M:

$$\sum_{k,\, l,\, m=0}^{\infty} |a_{klm}|\, \rho'^k r'^l R'^m = M.$$

Тогда

$$|a_{klm}|\, \rho'^k r'^l R'^m \leqslant M.$$

Откуда:

$$|a_{klm}| \leqslant \frac{M}{\rho'^k r'^l R'^m}.$$

Положим

$$A_{klm} = \frac{M}{\rho'^l r'^k R'^m}$$

и построим ряд

$$F(x, y, z) = \sum_{k,\, l,\, m=0}^{\infty} A_{klm} x^k y^l z^m = \sum_{k,\, l,\, m=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k r'^l R'^m} x^k y^l z^m =$$

$$= M \sum_{k,\, l,\, m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho'}\right)^k \left(\frac{y}{r'}\right)^l \left(\frac{z}{R'}\right)^m = M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho'}\right)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{y}{r'}\right)^l \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{R'}\right)^m. \quad \text{(IV)}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\rho'}\right)^k = 1 + \frac{x}{\rho'} + \left(\frac{x}{\rho'}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{x}{\rho'}}, \quad |x| < \rho',$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{y}{r'}\right)^l = 1 + \frac{y}{r'} + \left(\frac{y}{r'}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{y}{r'}}, \quad |y| < r',$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R'}\right)^m = 1 + \frac{z}{R'} + \left(\frac{z}{R'}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{z}{R'}}, \quad |z| < R',$$

то ряд (IV) сходится в области $|x| < \rho'$, $|y| < r'$, $|z| < R'$ и его суммой будет

$$F(x, y, z) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{R'}\right)}.$$

Ряд (IV) является **мажорантным** для ряда (II), а его сумма $F(x, y, z)$ является **мажорантой** для функции $f(x, y, z)$.

Аналогично убедимся, что для ряда

$$f(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} x^k y^l, \quad |x| < \rho, \quad |y| < r$$

мажорантным рядом будет

$$F(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k r'^l} x^k y^l = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)}, \quad |x| < \rho', \ |y| < r'$$

$$(0 < \rho' < \rho, \quad 0 < r' < r),$$

а для ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < \rho$$

в качестве **мажорантного** ряда можно взять

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k} x^k = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}, \quad |x| < \rho', \quad (0 < \rho' < \rho).$$

146. Формулировка теоремы Коши для нормальной системы n уравнений. Пусть дана система (1′),

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема. *Если правые части системы* (1′) *голоморфны относительно всех своих аргументов в окрестности точки* $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, *т. е. разложимы в степенные ряды вида*

$$f_k(x, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{m_0, m_1, \ldots, m_n=0}^{\infty} \alpha_{m_0 m_1 \ldots m_n}^{(k)} (x - x_0)^{m_0} (y_1 - y_1^{(0)})^{m_1} \ldots (y_n - y_n^{(0)})^{m_n}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2′}$$

причем эти ряды сходятся в области

$$|x - x_0| < \rho, \ |y_1 - y_1^{(0)}| < r, \ |y_2 - y_2^{(0)}| < r, \ldots, |y_n - y_n^{(0)}| < r, \tag{3′}$$

то система (1′) *имеет единственное решение, голоморфное в окрестности точки* $x = x_0$ *и удовлетворяющее начальным условиям:*

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{4′}$$

т. е. решение, представимое степенными рядами

$$y_k = y_k^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} (x - x_0)^s \ (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5′}$$

заведомо сходящимися в области

$$|x - x_0| < \rho_1 < \rho, \ \rho_1 = \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)\rho' M}}\right), \tag{6′}$$

где $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, а M — *некоторая положительная постоянная* *

Существование и единственность решения системы (1′), удовлетворяющего начальным условиям (4′) следует уже из теоремы Пикара, условия которой, при соблюдении условия теоремы Коши, заведомо выполнены. В теореме Коши устанавливается голоморфность этого решения в некоторой окрестности начального значения x_0 независимой переменной x.

Не умаляя общности, можно считать все начальные данные нулевыми:

$$x_0 = 0, \quad y_1^{(0)} = 0, \ \ldots, \ y_n^{(0)} = 0,$$

так как в противном случае этого всегда можно добиться подстановкой:

$$x - x_0 = \xi, \quad y_1 - y_1^0 = \eta_1, \ \ldots, \ y_n - y_n^0 = \eta_n.$$

---

* M есть наибольшее из чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n$, входящих в выражения мажорант для правых частей системы (1′).

Таким образом, теорема Коши утверждает, что *если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений голоморфны в окрестности начала координат, то существует единственное решение, голоморфное в окрестности точки $x=0$ и исчезающее вместе с x.*

147. Доказательство теоремы Коши для нормальной системы двух уравнений. Мы будем доказывать теорему Коши, как и теорему Пикара, для случая $n=2$, при этом, согласно сказанному в конце предыдущего пункта, будем предполагать начальные данные нулевыми.

Итак, пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы докажем, что *если правые части голоморфны в окрестности начала координат, т. е.*

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \alpha_{lmn} x^l y^m z^n, \\ f_2(x, y, z) &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \beta_{lmn} x^l y^m z^n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем ряды справа сходятся в области:

$$|x| < \rho, \quad |y| < r, |z| < r, \tag{3}$$

то система (1) *имеет единственное решение, голоморфное в окрестности точки $x=0$ и исчезающее вместе с x, т. е. решение, удовлетворяющее начальным условиям:*

$$y=0, \quad z=0 \quad \textit{при} \quad x=0, \tag{4}$$

и представимое степенными рядами

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \tag{5}$$

заведомо сходящимися в области

$$|x| \rho_1 << \rho, \quad \rho_1 = \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{3\rho' M}}\right). \tag{6}$$

Здесь $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, *а* M — *некоторая положительная постоянная.*

З а м е ч а н и е. Если система (1) имеет решение, голоморфное в окрестности точки $x=0$ и исчезающее вместе с x, то ряды (5) мы можем записать в виде*

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0} \frac{x^n}{n!} + \ldots, \\ z &= \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} x + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_{x=0} \frac{x^n}{n!} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Но *эти ряды мы можем составить формально* и не будучи заранее уверенными в существовании голоморфного решения (5), пользуясь лишь тем, что правые части системы (1) голоморфны в окрестности начала координат.

В самом деле, из уравнений (1) находим:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= f_1(0,\ 0,\ 0), \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} &= f_2(0,\ 0,\ 0). \end{aligned}\right| \quad (8)$$

Дифференцируя систему (1), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Полагая в правых частях $x=0$, $y=0$, $z=0$ и принимая во внимание (8), мы найдем значения $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$ в точке $x=0$.

Дифференцируя (9) еще раз и полагая в правых частях $x=0$, $y=0$, $z=0$, мы найдем значения $\frac{d^3y}{dx^3}$ и $\frac{d^3z}{dx^3}$ в точке $x=0$ и т. д.

Доказательство сходимости формальных рядов впервые было дано Коши.

Он доказал, что ряды (7) сходятся в некоторой достаточно малой окрестности точки $x=0$ и, следовательно они всегда представляют искомое голоморфное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы К о ш и. Для удобства доказательства теоремы Коши построим формальное решение (5) *методом неопределенных коэффициентов,* т. е. будем искать решение системы (1) в виде (5), считая коэффициенты $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ неопределенными и определим их формальной подстановкой разложений (5) в систему (1) и приравниванием коэффициен-

* Ряды (7) суть р я д ы Т е й л о р а для функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$, составляющих решение системы (1). Понятие о ряде Тейлора для функции $f(x)$ см.: Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 50—61, 97—98.

тов при одинаковых степенях x в левых и правых частях полученных равенств.

Подставляя ряды (5) в систему (1), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kc_k^{(1)} x^{k-1} &= \sum_{l,\,m,\,n=0}^{\infty} \alpha_{lmn} x^l \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k\Big)^m \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k\Big)^n, \\ \sum_{k=1}^{\infty} kc_k^{(2)} x^{k-1} &= \sum_{l,\,m,\,n=0}^{\infty} \beta_{lmn} x^l \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k\Big)^m \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k\Big)^n. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Представляя правые части в виде рядов по степеням x, получим:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kc_k^{(1)} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1} (\alpha_{\lambda\mu\nu},\ c_1^{(1)},\ c_2^{(1)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(1)}, \\ &\qquad c_1^{(2)},\ c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(2)})\ x^{k-1}. \\ \sum_{k=1}^{\infty} kc_k^{(2)} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k-1} (\beta_{\lambda\mu\nu},\ c_1^{(1)},\ c_2^{(1)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(1)}, \\ &\qquad c_1^{(2)},\ c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(2)})\ x^{k-1}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Приравнивая свободные члены, коэффициенты при первой степени x, при второй степени x, . . ., при $(k-1)$-й степени x, соответственно получим:

$$\left.\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \alpha_{000} \equiv P_0, \\ c_1^{(2)} &= \beta_{000} \equiv Q_0; \end{aligned}\right\} \quad (12_1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2c_2^{(1)} &= \alpha_{100} + \alpha_{010} c_1^{(1)} + \alpha_{001} c_1^{(2)} \equiv P_1, \\ 2c_2^{(2)} &= \beta_{100} + \beta_{010} c_1^{(1)} + \beta_{001} c_1^{(2)} \equiv Q_1; \end{aligned}\right\} \quad (12_2)$$

$$\left.\begin{aligned} 3c_3^{(1)} &= \alpha_{200} + \alpha_{110} c_1^{(1)} + \alpha_{101} c_1^{(2)} + \alpha_{010} c_2^{(1)} + \\ &\quad + \alpha_{020} c_1^{(1)^2} + \alpha_{001} c_2^{(2)} + \alpha_{002} c_1^{(2)^2} + \alpha_{011} c_1^{(1)} c_1^{(2)} \equiv P_2, \\ 3c_3^{(2)} &= \beta_{200} + \beta_{110} c_1^{(1)} + \beta_{101} c_1^{(2)} + \beta_{010} c_2^{(1)} + \\ &\quad + \beta_{020} c_1^{(1)^2} + \beta_{001} c_2^{(2)} + \beta_{002} c_1^{(2)^2} + \beta_{011} c_1^{(1)} c_1^{(2)} \equiv Q_2, \end{aligned}\right\} \quad (12_3)$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} kc_k^{(1)} &= P_{k-1} (\alpha_{\lambda\mu\nu},\ c_1^{(1)},\ c_2^{(1)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(1)},\ c_1^{(2)},\ c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(2)}), \\ kc_k^{(2)} &= Q_{k-1} (\beta_{\lambda\mu\nu},\ c_1^{(1)},\ c_2^{(1)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(1)},\ c_1^{(2)},\ c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_{k-1}^{(2)}), \end{aligned}\right\} \quad (12_k)$$

. . . .

Формулы (12_k) носят рекуррентный характер. Они выражают коэффициенты $c_k^{(1)}$ и $c_k^{(2)}$ рядов (5) через предшествующие коэффициенты $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$, . . ., $c_{k-1}^{(1)}$, $c_1^{(2)}$, $c_2^{(2)}$, . . ., $c_{k-1}^{(2)}$ этих рядов и через известные коэффициенты $\alpha_{\lambda\mu\nu}$, $\beta_{\lambda\mu\nu}$ $(\lambda + \mu + \nu \leqslant k - 1)$ разложений правых частей данной системы (1). Так как при этом приходится выполнять лишь действия сложения и умножения, то P_{k-1} и Q_{k-1} являются полиномами от всех своих аргументов, т. е. от указанных коэффициентов рядов (2) и первых $(k-1)$ коэффициентов каждого из рядов (5), причем все коэффициенты этих полиномов суть целые положительные числа*.

Но из (12_1) мы имеем: $c_1^{(1)} = \alpha_{000}$, $c_1^{(2)} = \beta_{000}$. Подставляя эти значения в формулы (12_2), находим:

$$\left.\begin{aligned} c_2^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_{100} + \alpha_{010}\,\alpha_{000} + \alpha_{001}\,\beta_{000}\right), \\ c_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(\beta_{100} + \beta_{010}\,\alpha_{000} + \beta_{001}\,\beta_{000}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Затем, из формул (12_3) мы можем найти $c_3^{(1)}$, $c_3^{(2)}$ и т. д.

Найдя $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_{k-1}^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_{k-1}^{(2)}$ и подставив их в (12_k), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} c_k^{(1)} &= R_k^{(1)}\left(\alpha_{\lambda\mu\nu},\ \beta_{\lambda\mu\nu}\right), \\ c_k^{(2)} &= R_k^{(2)}\left(\alpha_{\lambda\mu\nu},\ \beta_{\lambda\mu\nu}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $R_k^{(1)}$ и $R_k^{(2)}$ суть полиномы с положительными коэффициентами от коэффициентов рядов (2) $\alpha_{\lambda\mu\nu}$ и $\beta_{\lambda\mu\nu}$ $(\lambda + \mu + \nu \leqslant k-1)$.

Таким образом, все коэффициенты рядов (5) найдены. Поскольку все эти коэффициенты определяются единственным образом по формулам (14), то *голоморфное решение с заданными* (в данном случае нулевыми) *начальными данными может существовать только одно* **.

Докажем теперь сходимость рядов (5). Для этого построим заведомо сходящиеся ряды с положительными коэффициентами, которые не меньше абсолютных величин коэффициентов формальных рядов (5).

С этой целью рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений, заменяя правые части системы (1) их общей мажорантой и обозначая новые искомые функции через Y и Z:

---

* Например, у полинома P_1 все коэффициенты равны 1.

** Заметим, что формальные ряды (5) можно часто построить и в тех случаях, когда правые части системы (1) не голоморфны ни в какой окрестности начальных данных, но тогда в общем случае нет гарантии, что эти ряды сходятся хоть в какой-нибудь окрестности начального значения x. Например для уравнения

$$x^2y' + (x-1)\,y + 1 = 0$$

формальным рядом, удовлетворяющим начальному условию

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

будет

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n.$$

Но этот ряд расходится при всяком $x \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dY}{dx} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{Y}{r'}\right)\left(1-\frac{Z}{r'}\right)},\\ \frac{dZ}{dx} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{Y}{r'}\right)\left(1-\frac{Z}{r'}\right)}.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Здесь $M = \max(M_1, M_2)$, где M_1 и M_2 — постоянные, входящие в выражения мажорант для $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$, а ρ' и r' — любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$.

Система (15) называется *мажорантной* по отношению к рассматриваемой нами системе (1). Правые части системы (15), так же как и правые части системы (1), голоморфны в окрестности начала координат. Их разложение имеет вид

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{Y}{r'}\right)\left(1-\frac{Z}{r'}\right)} = \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n} x^l Y^m Z^n, \qquad (16)$$

причем ряд справа сходится в области

$$|x| < \rho', \quad |Y| < r', \quad |Z| < r' \qquad (17)$$

и его коэффициенты не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов разложений правых частей системы (1):

$$\left.\begin{aligned}|\alpha_{lmn}| &\leqslant \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n},\\ |\beta_{lmn}| &\leqslant \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n}.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Будем искать решение системы (15), исчезающее вместе с x, т. е. решение с начальными условиями:

$$Y = 0, \quad Z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \qquad (19)$$

Так как система (15) и начальные условия (19) симметричны относительно Y и Z, т. е. сохраняют свой вид при замене Y на Z, то $Y \equiv Z$. Действительно, мы имеем $\frac{dY}{dx} \equiv \frac{dZ}{dx}$ и $Y(0) = Z(0) = 0$, т. е. функции Y и Z имеют одинаковые производные и в одной точке ($x = 0$) значения этих функций совпадают, но тогда функции Y и Z совпадают на всем интервале, т. е. $Y \equiv Z$. Поэтому достаточно найти решение уравнения

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^2} \text{*}, \tag{20}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$Y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (20), имеем:

$$\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^2 dY = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}}\, dx, \quad -\frac{r'}{3}\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 =$$

$$= -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) + C. \tag{22}$$

Полагая в полученном общем интеграле $Y=0$, $x=0$, находим, что $C = -\frac{r'}{3}$, так что искомым решением будет

$$-\frac{r'}{3}\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 = -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) - \frac{r'}{3} \tag{23}$$

или

$$\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 = 1 + \frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right), \tag{24}$$

откуда

$$Y = r'\left(1 - \sqrt[3]{1 + \frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)}\right) = r'\left(1 - \sqrt[3]{1 + \alpha}\right). \tag{25}$$

Полученное решение Y разложимо в ряд по степеням величины

$$\alpha = \frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right), \tag{26}$$

если $|\alpha| < 1$, так как разложение функции $\sqrt[3]{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{3}}$ по степеням α представляет собою биномиальный ряд, который, как известно, сходится при $|\alpha| < 1$**. В свою очередь α разложимо в ряд по степеням x, если $|x| < \rho'$, ибо разложение функции $\ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)$ по степеням x получается заменой в (логарифмическом) ряде для функции $\ln(1+t)$, сходящемся при $|t| < 1$***, переменной t на $\left(-\frac{x}{\rho'}\right)$, так что полученный ряд будет сходиться при $\left|-\frac{x}{\rho'}\right| < 1$ или $|x| < \rho'$.

* Это уравнение получается из первого уравнения системы (15) после замены Z на Y.

** См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, стр. 59.

*** Там же, стр. 56.

Следовательно, Y разложимо в ряд по степеням x, если

$$|x| < \rho' \quad \text{и} \quad \left|\frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\right| < 1. \tag{27}$$

В дальнейшем достаточно рассматривать только положительные значения x*. Чтобы удовлетворить первому из неравенств (27), будем считать, что

$$0 < x < \rho'.$$

При этом условии имеем:

$$\frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) < 0, \left|\frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\right| = -\frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) **,$$

а тогда второе из неравенств (27) примет вид

$$-\frac{3\rho' M}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) < 1$$

или

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) > -\frac{r'}{3\rho' M}, \quad 1 - \frac{x}{\rho'} > e^{-\frac{r'}{3\rho' M}},$$

откуда:

$$x < \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{3\rho' M}}\right). \tag{28}$$

Следовательно, решение (25) разложимо в ряд по степеням x

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k x^k, \tag{29}$$

сходящийся в области

$$|x| < \rho_1 = \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{3\rho' M}}\right). \tag{30}$$

Таким образом, для мажорантной системы (15) мы получили решение:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k^{(1)} x^k, \\ Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k^{(2)} x^k, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где

$$\bar{c}_k^{(1)} = \bar{c}_k^{(2)} = \bar{c}_k, \tag{32}$$

голоморфное в области $|x| < \rho_1$ и исчезающее вместе с x.

---

* Ибо известно, что если степенной ряд по x сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится и при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$ (См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 88.

** Так как, если $a < 0$, то $|a| = -a$.

Коэффициенты рядов (31) мы получили путем разложения решения (25) в ряд по степеням x. Но те же самые коэффициенты мы можем получить путем непосредственной подстановки рядов (31) в систему (15) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x, т. е. тем же путем, каким были получены коэффициенты рядов (5) *. При этом для определения $\overline{c}_k^{(1)}$ и $\overline{c}_k^{(2)}$ мы будем иметь опять формулы (14), в которых лишь следует заменить коэффициенты разложений функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ соответствующими коэффициентами разложения мажоранты, т. е. α_{lmn} и β_{lmn} нужно заменить на $\dfrac{M}{\rho'^l r'^m r'^n}$. Так как в формулах (14) функции $R_k^{(1)}$ и $R_k^{(2)}$ суть полиномы с положительными коэффициентами от коэффициентов рядов, стоящих в правых частях системы (2) и так как мы заменяем эти последние коэффициенты положительными коэффициентами $\dfrac{M}{\rho'^l r'^m r'^n}$ рядов для правых частей мажорантной системы (15), то, принимая во внимание оценки (18), мы видим, что коэффициенты рядов (31) будут положительными и будут не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов рядов (5), дающих формальное решение поставленной задачи Коши, т. е. мы будем иметь неравенства

$$\left.\begin{aligned} |c_k^{(1)}| &\leqslant \overline{c}_k^{(1)}, \\ |c_k^{(2)}| &\leqslant \overline{c}_k^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$

Так как ряды (31) сходятся в области $|x| < \rho_1$, причем коэффициенты этих рядов положительны и не меньше согласно (33), абсолютных величин коэффициентов рядов (5), то последние ряды сходятся, по крайней мере, в той же области, так что они представляют не только формальное, но и истинное решение системы (1) с начальными условиями (4), голоморфное в интервале (6). Теорема доказана.

Теорема Коши, так же как и теорема Пикара, дает возможность приближенно находить решения.

Сравнивая теорему Коши с теоремой Пикара, мы видим, что теорема Коши применима к более узкому классу дифференциальных уравнений, но зато она дает решение в виде степенного ряда, причем для построения решения нам совершенно не нужно выполнять квадратуры, что в общем случае применения метода Пикара связано с большими трудностями и вызывает дополнительные погрешности.

---

* Так как выше мы показали, что для системы с голоморфными правыми частями может существовать только одно голоморфное решение задачи Коши.

Теорема Коши легко распространяется на случай комплексных значений аргумента и искомых функций, являясь в этом случае одной из основных теорем аналитической теории дифференциальных уравнений.

Вместе с указанными достоинствами, теорема Коши обладает тем общим с теоремой Пикара недостатком, что дает лишь решение, удовлетворяющее определенным начальным данным. Чтобы найти решение с другими начальными данными, нужно проводить все вычисления заново.

Пример. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y + 1 \tag{34}$$

и требуется найти голоморфное решение, исчезающее вместе с x. Такое решение существует и единственно. Его можно найти, подставляя ряд

$$y = \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s \tag{35}$$

в уравнение (34) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x или по формуле

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=y=0)} x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x=y=0)} \frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{(x=y=0)} \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{36}$$

Но мы, зная, что уравнение (34) интегрируется в элементарных функциях, найдем сначала решение с нашими начальными данными, а затем посмотрим, в какой области оно представимо в виде ряда по степеням x.

Интегрируя уравнение (34), имеем:

$$\frac{dy}{y^2 - 2y + 1} = dx, \quad \frac{dy}{(y-1)^2} = dx, \tag{37}$$

откуда:

$$\frac{1}{1-y} = x + C, \quad y = 1 - \frac{1}{x+C}. \tag{38}$$

Удовлетворяя начальному условию $y=0$ при $x=0$, находим $C=1$, так что искомым решением будет

$$y = 1 - \frac{1}{1+x}. \tag{39}$$

Это решение определено и непрерывно в области

$$-1 < x < +\infty, \tag{40}$$

однако оно представимо в виде ряда по степеням x лишь в интервале

$$-1 < x < +1, \tag{41}$$

так как ряд

$$y = 1 - \frac{1}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots \tag{42}$$

сходится лишь в области $|x|<1$, несмотря на то, что ряд в правой части уравнения (34) сходится на всей плоскости (x, y). Это одна из характерных особенностей нелинейных уравнений вообще.

Найдем теперь решение того же уравнения (34), но с другим начальным условием:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{43}$$

Таким решением, очевидно, является

$$y = 1. \tag{44}$$

Ряд (44) сходится при всех значениях x.

Как видно из примеров, *область голоморфности решения определяется не только областью голоморфности правой части уравнения, но еще как-то зависит и от выбора начальных данных.*

Характер этой зависимости, построение решения с заданными начальными данными в возможно более широкой области и свойства этого решения изучаются в аналитической теории дифференциальных уравнений. *Теорема Коши дает лишь нижнюю границу области голоморфности решения с заданными начальными данными.* К тому же, как мы увидим ниже [149], голоморфные решения могут иногда существовать даже и в тех случаях, когда условие теоремы Коши не выполнено.

148. Теорема Коши для линейной системы. В общем случае область существования голоморфного решения, доставляемая теоремой Коши, как следует из формулы (6′), несколько меньше области голоморфности относительно x правых частей системы (1). Покажем, что в случае линейной системы область голоморфности решения не меньше области голоморфности относительно x правых частей системы.

Пусть дана линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

и поставлены начальные условия

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{46}$$

Теорема. *Предположим, что в системе* (45) *коэффициенты* $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ *и функции* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *голоморфны в окрестности точки* $x = x_0$ *(т. е. в окрестности начального значения независимой переменной), так что имеют место разложения*

$$p_{kl}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{(k,l)} (x - x_0)^s, \quad f_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^{(k)} (x - x_0)^s,$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{47}$$

где ряды справа сходятся в некотором интервале $|x - x_0| < \rho$.

Тогда система (45) *имеет единственное решение*

$$y_1 = y_1(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \tag{48}$$

голоморфное по крайней мере в той же окрестности точки $x = x_0$ *и удовлетворяющее начальным условиям* (46), *с любыми на-*

чальными значениями искомых функций, так что решение (48) *представимо в виде*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} (x - x_0)^s, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_n^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(n)} (x - x_0)^s, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где ряды справа заведомо сходятся в интервале $|x - x_0| < \rho$ [т. е. *в том же интервале, что и ряды* (47)], *а* $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — *любые заданные числа.*

Доказательство, так же как и в общем случае теоремы Коши, будем проводить для $n=2$ в предположении, что все начальные данные равны нулю.

Итак, пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p_{11}(x)y + p_{12}(x)z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= p_{21}(x)y + p_{22}(x)z + f_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Мы докажем, что *если* $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ *и* $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ *голоморфны в области* $|x| < \rho$, *т. е. представимы в этой области рядами вида*

$$p_{kl}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{(kl)} x^s, \quad f_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^{(k)} x^s, \tag{51}$$

то существует единственное решение, заведомо голоморфное в области

$$|x| < \rho$$

и исчезающее вместе с x, *т. е. решение вида*

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ z &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где ряды справа заведомо сходятся при $|x| < \rho$.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема Коши предыдущего пункта, но здесь, используя л и н е й н о с т ь системы, удается построить мажорантную систему дифференциальных уравнений, позволяющую получить б о л е е ш и р о к у ю область существования и голоморфности решения.

Подставляя ряды (52) в систему (50) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, мы определим все коэффициенты рядов (52) по формулам (14).

Для доказательства сходимости этих рядов рассмотрим *мажорантную* систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dY}{dx} &= \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}(Y+Z+1),\\ \frac{dZ}{dx} &= \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}(Y+Z+1),\end{aligned}\right| \tag{53}$$

где функция

$$\frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^l} x^l, \quad |x| < \rho' < \rho \tag{54}$$

представляет собою общую мажоранту для функций $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ *.

Будем искать решение системы (53), удовлетворяющее, так же как и искомое решение системы (50), нулевым начальным условиям:

$$Y = 0, \quad Z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{55}$$

Заметим прежде всего, что $Y \equiv Z$, так как система (53) и начальные условия (55) симметричны относительно Y и Z, так что наша задача приводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}(2Y+1) \tag{56}$$

с начальным условием

$$Y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{57}$$

Интегрируя уравнение (56), имеем:

$$\frac{dY}{2Y+1} = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}dx, \quad \frac{1}{2}\ln(2Y+1) = -M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right) + C. \tag{58}$$

Удовлетворяя начальному условию (57), находим $C=0$, так что искомым решением будет

$$\frac{1}{2}\ln(2Y+1) = -M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right), \tag{59}$$

откуда

$$2Y+1 = \left(1-\frac{x}{\rho'}\right)^{-2M\rho'},$$

так что

$$Y = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)^{-2M\rho'} - 1\right]. \tag{60}$$

Из последней формулы видно, что Y представимо в виде степенного ряда

* Здесь M есть наибольшая из постоянных, входящих в состав мажорант для всех этих шести функций.

$$Y = \sum_{s=1}^{n} \bar{c}_s x^s, \tag{61}$$

сходящегося при $|x| < \rho'$, ибо ряд для $\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)^{-2M\rho'}$ получается из (биномиального) ряда для функции $(1+t)^m$, если положить $t = -\frac{x}{\rho'}$, $m = -2M\rho'$.

Таким образом мажорантная система (53) имеет решение:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{s=1}^{\infty} \bar{c}_s^{(1)} x^s \\ & \qquad\qquad (\bar{c}_s^{(1)} = \bar{c}_s^{(2)} = \bar{c}_s), \\ Z &= \sum_{s=1}^{\infty} \bar{c}_s^{(2)} x^s \end{aligned} \tag{62}$$

голоморфное в области $|x| < \rho'$.

Но коэффициенты рядов (62) мы могли бы определять и по формулам (14), подставляя (62) в (53) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x. При этом мы снова получили бы, что коэффициенты рядов (62) положительны [так как коэффициенты рядов правых частей (53) положительны] и что они не меньше абсолютных величин коэффициентов рядов (52). Поэтому ряды (52) также должны сходиться по крайней мере при $|x| < \rho'$. Так как ρ' можно взять сколько угодно близким к ρ, то решение (52) будет голоморфно в области $|x| < \rho$. Теорема доказана.

Замечание 1. *Если в системе* (45) *функции* $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ ($k, l = 1, 2, \ldots, n$) *суть целые функции, т. е. функции, представимые рядами по степеням разности* $x - x_0$ (*где* x_0 — *любое число*), *сходящимися при всех значениях* x, *то каковы бы ни были числа* x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, *система* (45) *имеет решение вида* (49), *причем функции* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *также являются целыми, т. е. ряды Тэйлора для этих функций сходятся при всех значениях* x. Например, это будет иметь место, когда функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ постоянны или представляют собою полиномы от x или функции типа e^x, $\sin x$, $\cos x$. В рассматриваемом случае можно искать решение системы (45) с любыми начальными данными в виде рядов (49) с неопределенными коэффициентами $c_s^{(k)}$. Сходимость найденных рядов обеспечена при всех значениях x.

Замечание 2. *Если в системе* (45) *коэффициенты* $p_{kl}(x)$ *и функции* $f_k(x)$ *суть рациональные дроби, так что они имеют вид*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{63}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы от x и если число x_0 не обращает в нуль ни одного из знаменателей этих дробей, то система (45) *будет иметь единственное решение, голоморфное в окрестности точки $x=x_0$ и удовлетворяющее начальным условиям* (46),

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где начальные значения искомых функций можно задавать произвольно. При этом ряды (49), *представляющие это решение, будут сходиться, по крайней мере, в интервале $|x-x_0| < \rho$, где ρ есть расстояние от точки $x=x_0$ до ближайшей из точек, в которых знаменатели дробей* (63) *обращаются в нуль (при этом учитываются все корни уравнений $Q(x)=0$ как вещественные, так и комплексные).*

В самом деле, при сделанных предположениях функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ представимы рядами вида (47) по степеням разностей $x-x_0$, сходящимися в интервале $|x-x_0| < \rho$, откуда в силу теоремы Коши и вытекает наше утверждение.

Из сказанного ясно, что в рассматриваемом случае решение системы (45) с начальными условиями (46) можно искать в виде рядов (49) с неопределенными коэффициентами $c_s^{(k)}$, причем дело сводится только к вычислению этих коэффициентов. Сходимость найденных рядов обеспечена по крайней мере в интервале $|x-x_0| < \rho$.

Замечание 3. *Линейное уравнение первого порядка*

$$y' + p(x)\, y = q(x), \tag{64}$$

в котором $p(x)$ и $q(x)$ голоморфны в области $|x-x_0| < \rho$, имеет единственное решение, голоморфное по крайней мере в той же области и удовлетворяющее начальным условиям $y=y_0$ при $x=x_0$, причем y_0 — произвольное число. В справедливости этого утверждения легко убедиться и непосредственно на основании формулы общего решения в форме Коши:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\, dx \right]. \tag{65}$$

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$y' + \frac{1}{x-1}\, y = 0. \tag{66}$$

Найти решение, голоморфное в окрестности точки $x=0$ и принимающее начальное значение $y=1$ при $x=0$.

Искомым решением является

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots, \quad |x| < 1. \tag{67}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{1}{1-x}\, y = 0. \tag{68}$$

Здесь общее решение имеет вид

$$y = C\,(x-1), \tag{69}$$

так что всякое решение будет голоморфно при всех значениях x. Здесь особенность коэффициента $\frac{1}{1-x}$ в точке $x=1$ сказывается на решении в том отношении, что невозможно найти решения вида $y=y(x)$ с начальными данными $x=1$, $y=y_0\neq 0$, ибо все решения обладают свойством: $y\to 0$ при $x\to 1$.

Переписав уравнение (68) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}, \tag{70}$$

нетрудно убедиться в том, что точка $x=1$, $y=0$ является особой точкой уравнения (68), причем эта особая точка есть дикритический узел*. В самом деле, в силу (69) все решения уравнения (68) примыкают к особой точке $x=1$, $y=0$, но каждое из них примыкает к особой точке со своим направлением.

149. Примеры существования голоморфных решений в случае невыполнения условия теоремы Коши. Условие теоремы Коши является лишь достаточным для существования голоморфного решения, так как можно построить примеры уравнений, правые части которых неголоморфны в окрестности начальных данных, а голоморфное решение задачи Коши существует, и даже может случиться, что таких решений будет бесчисленное множество.

Кроме того, в случае невыполнения условия теоремы Коши, наряду с голоморфными решениями, иногда существуют и неголоморфные решения, тогда как в случае выполнения условия теоремы Коши неголоморфных решений задачи Коши с теми же начальными данными не существует (почему?).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$xy' = ax + by \quad \text{или} \quad y' = \frac{ax+by}{x}, \quad b\neq 0. \tag{71}$$

Правая часть этого уравнения неголоморфна в точке $x=0$, $y=0$, ибо она в этой точке даже не определена. Точка $x=0$, $y=0$ является особой очкой типа $\frac{0}{0}$.

Интегрируя уравнение (71), получаем:

$$y = Cx^b + \frac{a}{1-b}\, x\ (x\neq 0), \quad \text{если} \quad b\neq 1, \tag{72}$$

$$y = Cx + ax\ln x\ (x\neq 0), \quad \text{если} \quad b = 1. \tag{73}$$

---

* См. п. 141.

Если b равно целому положительному числу, большему единицы, то все решения, как показывает формула (72), будут голоморфны в любой окрестности точки $x=0$, причем все они будут обладать свойством

$$y \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{74}$$

так что к особой точке $x=0$, $y=0$ будет примыкать бесчисленное множество голоморфных решений. Неголоморфных решений, обладающих свойством (74), нет.

Если b положительно, но не равно целому числу, например $b = \frac{1}{2}$, или $b = \sqrt{2}$, то существует только одно голоморфное решение

$$y = \frac{a}{1-b}\, x, \tag{75}$$

исчезающее вместе с x. Наряду с этим голоморфным решением существует бесчисленное множество неголоморфных решений

$$y = Cx^b + \frac{a}{1-b}\, x, \tag{76}$$

тоже исчезающих вместе с x. Заметим, однако, что все эти решения голоморфны относительно x и x^b.

Если $b<0$, то существует только одно голоморфное решение

$$y = \frac{a}{1-b}\, x, \tag{77}$$

обладающее свойством (74). Неголоморфных решений, обладающих этим свойством, нет.

Если $b=1$, то, согласно формуле (73), все решения исчезают вместе с x. Все они неголоморфны, если $a \neq 0$. Заметим, однако, что эти решения голоморфны относительно x и $x \ln x$. В этом случае не существует ни одного голоморфного решения, исчезающего вместе с x.

Наконец, в случае $b=1$, $a=0$ мы получаем бесчисленное множество голоморфных решений

$$y = Cx \quad (x \neq 0), \tag{78}$$

обладающих свойством (74). Неголоморфных решений, обладающих этим свойством, нет.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$xy' = x + 2y \quad (a = 1, \quad b = 2). \tag{79}$$

Здесь общее решение имеет вид

$$y = Cx^2 - x \quad (x \neq 0), \tag{80}$$

так что существует бесчисленное множество голоморфных решений, примыкающих к особой точке $x=0$, $y=0$. Неголоморфных решений нет.

Пример 3. Теперь рассмотрим уравнение

$$xy' = x + \frac{1}{2}\, y \left(a = 1, \quad b = \frac{1}{2}\right). \tag{81}$$

Общее решение

$$y = C\sqrt{x} + 2x \quad (x \neq 0). \tag{82}$$

Следовательно, существует одно голоморфное решение, исчезающее вместе с x:

$$y = 2x \quad (x \neq 0) \tag{83}$$

и бесчисленное множество неголоморфных решений, тоже примыкающих к особой точке $x=0$, $y=0$

$$y = C\sqrt{x} + 2x \quad (x \neq 0). \tag{84}$$

Все решения (84) голоморфны относительно x и $\sqrt{x}$.

Пример 4.

$$xy' = x - y \quad (a = 1, \quad b = -1). \tag{85}$$

Из общего решения

$$y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} \quad (x \neq 0) \tag{86}$$

мы видим, что существует одно голоморфное решение

$$y = \frac{x}{2}, \tag{87}$$

исчезающее вместе с x. Неголоморфных решений, исчезающих вместе с x, нет.

Пример 5.

$$xy' = x + y \quad (a = 1, \quad b = 1). \tag{88}$$

Из общего решения

$$y = Cx + x\ln x \quad (x \neq 0) \tag{89}$$

мы видим, что голоморфных решений, примыкающих к особой точке $x=0$, $y=0$ нет. Но зато существует бесчисленное множество неголоморфных решений, примыкающих к этой особой точке. Все они голоморфны относительно x и $x\ln x$.

Возникает вопрос, когда уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \tag{90}$$

где функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ голоморфны в окрестности точки $x=0$, $y=0$ и обращаются в нуль при $x=0$, $y=0$ (так что точка $x = 0$, $y = 0$ является изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$), имеет голоморфные и неголоморфные решения, примыкающие к особой точке, и каков возможный аналитический вид неголоморфных решений? Этот вопрос изучается в аналитической теории дифференциальных уравнений. Решение его проливает свет на качественную картину поведения интегральных кривых в окрестности особой точки и на вопрос об устойчивости нулевого решения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

150. Теорема Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Рассмотрим теперь вопрос о существовании голоморфного решения задачи Коши для уравнения n-го порядка. Мы ограничиваемся случаем уравнения, разрешенного относительно старшей производной.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{91}$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \ y' = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{92}$$

Поставим вопрос: *каким условиям достаточно подчинить правую часть уравнения (91) в окрестности начальных данных $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, чтобы уравнение (91) имело решение, голоморфное в окрестности точки $x=x_0$ (т. е. в окрестности начального значения независимой переменной) и удовлетворяющее начальным условиям (92)?*

Чтобы ответить на этот вопрос, мы так же, как и в п. **128**, приведем уравнение (91) к нормальной системе n уравнений первого порядка путем введения n неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, определяемых равенствами

$$y_1 = y, \ y_2 = y', \ \ldots, \ y_n = y^{(n-1)}. \tag{93}$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Вследствие этого нахождение голоморфного решения уравнения (91), удовлетворяющего начальным условиям (92), равносильно нахождению голоморфного решения системы (94), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1 = y_0, \ y_2 = y'_0, \ \ldots, \ y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{95}$$

Правые части системы (94) будут удовлетворять условию теоремы Коши для нормальной системы n уравнений п. **146**, если предположить, что функция $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ голоморфна относительно совокупности всех своих аргументов в некоторой области

$$|x - x_0| < \rho, \ |y_1 - y_0| < r, \ |y_2 - y'_0| < r, \ldots, |y_n - y_0^{(n-1)}| < r. \tag{96}$$

В этом случае система (94) имеет единственное решение, голоморфное в области $|x - x_0| < \rho_1 < \rho$ и удовлетворяющее начальным условиям (95).

Поэтому для уравнения (91) имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если правая часть уравнения* (91) *голоморфна относительно совокупности всех своих аргументов в окрестности начальных данных, т. е. имеет вид*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \sum_{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n=0}^{\infty} a_{m_0 m_1 m_2 \ldots m_n} (x-x_0)^{m_0} \times$$

$$\times (y-y_0)^{m_1} (y'-y_0')^{m_2} \ldots (y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)})^{m_n}, \qquad (97)$$

где ряд справа сходится в области

$$|x-x_0| < \rho, \ |y-y_0| < r, \ |y'-y_0'| < r, \ \ldots, \ |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}| < r, \qquad (98)$$

то существует единственное решение, голоморфное в окрестности точки $x=x_0$ и удовлетворяющее начальным условиям (92), *т. е. решение вида*

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \sum_{s=n}^{\infty} c_s (x-x_0)^s, \qquad (99)$$

причем ряд справа заведомо сходится в области

$$|x-x_0| < \rho_1, \quad \rho_1 = \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)\rho' M}}\right), \qquad (100)$$

где $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, *а M некоторая положительная постоянная.*

При этом коэффициенты c_s могут быть определены подстановкой ряда (99) в уравнение (91) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x-x_0$.

151. Теорема Коши для линейного уравнения n-го порядка. Рассмотрим теперь вопрос о существовании голоморфного решения задачи Коши для линейного уравнения.

Пусть дано линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots$$

$$\ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x) \qquad (101)$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \ y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \qquad (102)$$

Теорема. *Если коэффициенты $p_i(x)$ и функция $f(x)$ голоморфны в области $|x-x_0| < \rho$, то существует единственное* *решение уравнения* (101), *голоморфное, по крайней мере, в той же области и удовлетворяющее начальным условиям* (102), *где* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *произвольные заданные числа, т. е. решение вида*

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \sum_{s=n}^{\infty} c_s (x - x_0)^s, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{103}$$

Коэффициенты c_s можно определить подстановкой ряда (103) в уравнение (101) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x - x_0$.

Эта теорема вытекает из теоремы п. **148** так же, как теорема предыдущего пункта следует из теоремы п. **146**.

Если в уравнении (101) *функции* $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $f(x)$ *суть целые функции, то каковы бы ни были числа* $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, *уравнение* (101) *имеет решение вида* (103), *причем функция* y *также является целой.* Например, это будет иметь место, когда функции $p_k(x)$ и $f(x)$ постоянны или суть полиномы от x или функции типа e^x $\sin x$, $\cos x$ *.

Если $p_i(x)$ *и* $f(x)$ *представляют собою рациональные дроби вида* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ — *полиномы от* x, *а* x_0 — *любое число, не обращающее в нуль ни одного из знаменателей этих дробей, то уравнение* (101) *имеет единственное решение, голоморфное в окрестности точки* $x = x_0$ *и удовлетворяющее начальным условиям* (102), *причем числа* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *можно задавать произвольно. Это решение голоморфно, по крайней мере, в области* $|x - x_0| < \rho$, *где* ρ — *расстояние от точки* $x = x_0$ *до ближайшей из точек, в которых знаменатели вышеуказанных дробей обращаются в нуль***.

В заключение отметим, что теорема Коши представляет собою лишь достаточное условие существования голоморфного решения задачи Коши для уравнения n-го порядка. Для линейного однородного уравнения второго порядка мы покажем это в п. **191**.

152. Теорема о голоморфности решения относительно параметра. *Пусть дана система:*

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \lambda), \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \lambda), \tag{104}$$

* Ср. п. **148**, замечание 1.
** Ср. п. **148**, замечание 2.

правые части которой голоморфны относительно x, y, z и параметра λ, т. е.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z, \lambda) &= \sum_{k, l, m, n=0}^{\infty} \alpha_{klmn}(x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m (\lambda-\lambda_0)^n, \\ f_2(x, y, z, \lambda) &= \sum_{k, l, m, n=0}^{\infty} \beta_{klmn}(x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m (\lambda-\lambda_0)^n, \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

причем ряды сходятся в области

$$|x-x_0| < \rho, \quad |y-y_0| < r, \quad |z-z_0| < r, \quad |\lambda-\lambda_0| < \Lambda. \tag{106}$$

При сделанных предположениях существует единственное решение системы (104), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{107}$$

представимое в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{kl}^{(1)} (x-x_0)^k (\lambda-\lambda_0)^l, \\ z &= \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{kl}^{(2)} (x-x_0)^k (\lambda-\lambda_0)^l, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

сходящиеся в области $|x-x_0| < \rho_1 < \rho$, $|\lambda-\lambda_0| < \Lambda_1 < \Lambda$, где ρ_1 и Λ_1 — *некоторые числа, связанные определенной зависимостью.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Коши* .

Замечание. С соответствующими изменениями теорема настоящего пункта переносится на случай нескольких параметров, на нормальную систему *n* уравнений и на уравнение *n*-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

§ 6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА ПЕАНО)

153. Теорема Арцеля. Во всех предыдущих рассуждениях мы рассматривали уравнения, правые части которых удовлетворяли условиям, гарантирующим не только существование, но и

---

* Можно доказать, что решение системы (104), удовлетворяющее начальным условиям (107) голоморфно относительно параметра λ в некоторой окрестности значения $\lambda=\lambda_0$, не требуя голоморфности правых частей системы (104) относительно *x*. Достаточно предположить, чтобы правые части были только непрерывны относительно *x* и голоморфны относительно *y*, *z* и λ. (См.: А. Н. Тихонов. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Математический сборник, т. 22(64): 2(1948) и т. 31(72): 3(1952).

единственность решения. В настоящем параграфе мы покажем, что существование решения можно гарантировать при более слабом требовании относительно правых частей уравнения, а именно мы докажем теорему Пеано, согласно которой, как уже говорилось ранее *, для существования решения задачи Коши достаточно потребовать только непрерывности правых частей уравнений в окрестности начальных данных. Правда, при этом мы уже не можем гарантировать единственности решений. Но последняя и не всегда требуется. Многие вопросы качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости решения (движения) в смысле Ляпунова могут рассматриваться и для систем дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условиям единственности.

Для доказательства теоремы Пеано нам потребуется доказываемая ниже теорема Арцеля относительно семейства функций $\{f(x)\}$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в некотором интервале $[a, b]$.

Будем говорить, что *функции $f(x)$ семейства $\{f(x)\}$ равномерно ограничены в интервале* $[a, b]$, если существует такое постоянное положительное число M, что для всякой функции $f(x)$ из этого семейства и для любого x из интервала $[a, b]$ выполняется неравенство:

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{1}$$

Здесь существенно, что число M — о д н о и т о ж е д л я в с е х функций семейства $\{f(x)\}$. Например, функции семейства $\{\sin \alpha x\}$ равномерно ограничены во всяком интервале, причем $M=1$.

Далее будем говорить, что *функции $f(x)$ семейства $\{f(x)\}$ равностепенно непрерывны в интервале* $[a, b]$, если по всякому наперед заданному сколь угодно малому положительному числу ε найдется такое зависящее только от ε и не зависящее от выбора функции $f(x)$ положительное число η, что для всякой функции семейства $\{f(x)\}$ будет выполняться неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \tag{2}$$

при любых значениях x'' и x' из промежутка $[a, b]$, абсолютная величина разности которых меньше η:

$$|x'' - x'| < \eta. \tag{3}$$

Здесь существенно, что при заданном $\varepsilon > 0$ ч и с л о η о д н о и т о ж е для всех функций семейства. Например, функции семейства $\{\sin(\alpha + x)\}$ равностепенно непрерывны во всяком интервале, как это следует из формулы

$$|\sin(\alpha + x'') - \sin(\alpha + x')| = |\cos(\alpha + \bar{x})|\,|x'' - x'|$$
$$(x' < \bar{x} < x''). \tag{4}$$

---

* См. п. 105 и 120.

Напротив функции семейства $\{\sin\alpha x\}$ уже не будут, как нетрудно показать, равностепенно непрерывными ни в каком интервале.

Теорема Арцеля. *Из всякого семейства функций $\{f(x)\}$, состоящего из бесчисленного множества функций, определенных в интервале $[a, b]$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в этом интервале, можно выделить равномерно сходящуюся в $[a, b]$ бесконечную последовательность функций.*

Для доказательства* заметим прежде всего, что так как все функции семейства $\{f(x)\}$ равномерно ограничены в интервале $[a, b]$, то их графики будут расположены в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 50) со сторонами, имеющими длины $b-a$ и $2M$.

Составим бесконечную последовательность чисел:

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}}, \ \ldots, \ \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}}, \ \ldots, \tag{5}$$

где α — какое-нибудь целое положительное число или нуль. Каждому числу ε_k будет соответствовать число $\eta_k = \eta_k(\varepsilon_k)$, участвующее в определении равностепенной непрерывности функций семейства $\{f(x)\}$.

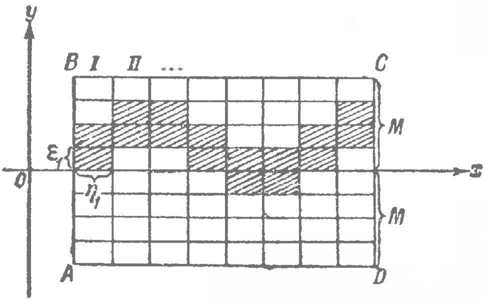


Рис. 50

Разобьем вертикальную сторону прямоугольника $ABCD$ на отрезки длиной ε_1, а горизонтальную сторону — на отрезки длиной $\leqslant \eta_1$. Через полученные точки проведем прямые параллельные осям координат, так что весь прямоугольник $ABCD$ разобьется на меньшие прямоугольники. При построении рис. 45 положено $\alpha=1$. Вертикальные полосы составленные из таких прямоугольников, будем обозначать римскими цифрами: I, II, ...

Так как

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad |x'' - x'| < \eta_1, \tag{6}$$

то график каждой функции семейства $\{f(x)\}$ может проходить не больше чем по двум соседним прямоугольникам каждой такой полосы.

Рассмотрим сначала полосу I. Так как в ней имеется лишь конечное число пар соседних прямоугольников, а через всю эту

* Приводимое доказательство теоремы Арцеля принадлежит Л. А. Люстернику и заимствовано нами из книги: И. Г. Петровский. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Гостехиздат, 1952, стр. 41—43.

полосу проходят графики всех функций семейства $\{f(x)\}$, состоящего из бесчисленного множества функций, то, по крайней мере, по одной паре соседних прямоугольников полосы I проходит бесконечное множество графиков функций из семейства $\{f(x)\}$. Эта пара прямоугольников на нашем рисунке заштрихована. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те функции, графики которых в полосе I проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Таких функций, как мы уже показали, бесконечное множество.

В полосе II все графики этих функций могут проходить только по четырем прямоугольникам этой полосы, график же каждой такой функции может проходить только по двум соседним из них. Следовательно, в полосе II существуют, по крайней мере, два таких смежных прямоугольника, по которым проходит бесконечное множество графиков функций данного семейства $\{f(x)\}$ и притом таких, которые и на полосе I проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Эти прямоугольники полосы II у нас также заштрихованы.

Рассуждая и дальше таким же образом, мы найдем целую полоску, расположенную над всем интервалом $[a, b]$, шириной $2\varepsilon_1$, по которой проходит бесконечное множество графиков функций семейства $\{f(x)\}$. Эта полоска у нас заштрихована. Будем ее обозначать через S_1.

Возьмем из этих графиков один какой-нибудь; пусть это будет график функции $f_1^*(x)$. Семейство оставшихся функций, графики которых проходят по S_1, обозначим через $\{f_1(x)\}$.

С семейством функций $\{f_1(x)\}$ проделаем то же, что мы проделали с семейством $\{f(x)\}$, с той только разницей, что теперь вместо ε_1 возьмем ε_2 и вместо η_1 возьмем η_2. Тогда получим вложенную в S_1 полоску S_2 шириной $2\varepsilon_2$, по которой проходят графики бесчисленного множества функций из семейства $\{f_1(x)\}$. Одну из этих функций обозначим через $f_2^*(x)$, а семейство остальных таких функций обозначим через $\{f_2(x)\}$.

Продолжая эти рассуждения, мы получим, таким образом, бесконечную последовательность функций:

$$f_1^*(x),\quad f_2^*(x),\ \ldots,\ f_k^*(x),\ \ldots \tag{7}$$

Графики всех этих функций, начиная с $f_k^*(x)$, лежат в полоске S_k шириной $\frac{M}{2^{\alpha+k-1}}$. Следовательно, эта последовательность сходится равномерно в интервале $[a, b]$, что и требовалось доказать.

154. Теорема существования решения дифференциального уравнения с непрерывной правой частью (теорема Пеано). Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{8}$$

правая часть которого определена в некоторой области

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \tag{9}$$

где a и b — заданные положительные числа. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема*. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, ограничена в области R, т. е. для всех точек (x, y) из области R выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant M, \tag{10}$$

где M — постоянное положительное число, то уравнение (8) имеет, по крайней мере, одно решение

$$y = \varphi(x), \tag{11}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{12}$$

Это решение определено и непрерывно вместе с первой производной в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{13}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{14}$$

и не выходит из области R, пока x изменяется в интервале (13).

Установим сначала одну лемму.

Пусть дана ломаная линия $y=\psi(x)$, состоящая из n звеньев. Обозначим через $x_0, x_1, \ldots, x_n$ абсциссы угловых точек, а через $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — угловые коэффициенты звеньев этой ломаной. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если угловые коэффициенты звеньев ломаной $y=\psi(x)$ заключены между двумя числами $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$*

$$k^{(1)} \leqslant k_i \leqslant k^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

то угловой коэффициент k всякой хорды ломаной $y=\psi(x)$ также заключен между этими числами, т. е.

$$k^{(1)} \leqslant k \leqslant k^{(2)}. \tag{15'}$$

Действительно, пусть концы хорды имеют абсциссы x' и x''. Тогда

$$k = \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'}.$$

Пусть $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ — проекции звеньев нашей ломаной на ось Ox, так что

---

* См.: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 68—73.

$$k_i = \frac{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Предположим, что между точками x' и x'' находятся точки x_μ, $x_{\mu+1}$, $\ldots$, $x_{\mu+l}$; тогда мы имеем:

$$\frac{\psi(x_\mu) - \psi(x')}{x_\mu - x'} = k_\mu,\ \frac{\psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu)}{x_{\mu+1} - x_\mu} = k_{\mu+1},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\psi(x'') - \psi(x_{\mu+l})}{x'' - x_{\mu+l}} = k_{\mu+l+1}.$$

Отсюда:

$$\psi(x_\mu) - \psi(x') = k_\mu (x_\mu - x'),$$
$$\psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu) = k_{\mu+1} (x_{\mu+1} - x_\mu),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi(x'') - \psi(x_{\mu+l}) = k_{\mu+l+1} (x'' - x_{\mu+l}).$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\psi(x'') - \psi(x') = k_\mu (x_\mu - x') + k_{\mu+1} (x_{\mu+1} - x_\mu) + \ldots + \\ + k_{\mu+l+1} (x'' - x_{\mu+l}).$$

Но

$$k^{(1)} \leqslant k_\mu \leqslant k^{(2)},\ k^{(1)} \leqslant k_{\mu+1} \leqslant k^{(2)},\ \ldots,\ k^{(1)} \leqslant k_{\mu+l+1} \leqslant k^{(2)}.$$

Поэтому

$$k^{(1)} (x_\mu - x' + x_{\mu+1} - x_\mu + \ldots + x'' - x_{\mu+l}) \leqslant \psi(x'') - \psi(x') \leqslant \\ \leqslant k^{(2)} (x_\mu - x' + x_{\mu+1} - x_\mu + \ldots + x'' - x_{\mu+l})$$

или

$$k^{(1)} (x'' - x') \leqslant \psi(x'') - \psi(x') \leqslant k^{(2)} (x'' - x'),$$

откуда:

$$k^{(1)} \leqslant \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} \leqslant k^{(2)}, \tag{16}$$

т. е. (15'),

$$k^{(1)} \leqslant k \leqslant k^{(2)},$$

что и доказывает лемму. Ясно, что утверждение леммы справедливо для ломаной, состоящей из любого конечного числа звеньев.

Доказательство теоремы Пеано. Ограничимся доказательством существования решения для интервала $[x_0, x_0 + h]$. Из метода доказательства будет видно, что оно легко переносится и на промежуток $[x_0 - h, x_0]$.

Обозначим через R_+ замкнутую область, определенную неравенствами:

$$R_+: \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, \quad |y - y_0| \leqslant b. \tag{17}$$

Возьмем любое целое положительное число n и построим ломаную Эйлера $y=\varphi_n(x)$ (рис. 51). Для этого разделим интервал $[x_0, x_0+h]$ на n равных частей, обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_0 + h \tag{18}$$

и определим $\varphi_n(x)$ следующим образом *:

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\\ \varphi_n(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\\ \dots\dots\dots & \\ \varphi_n(x) = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x - x_{i-1}), & \text{при } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\\ \dots\dots\dots & \\ \varphi_n(x) = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}), & \text{при } x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n,\end{array}\right\} \tag{19}$$

где

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

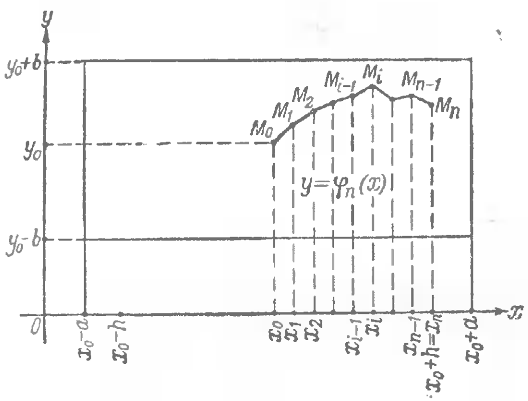


Рис. 51

Построенная ломаная $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ целиком лежит в области R_+. В самом деле, в силу доказанной выше леммы, мы имеем оценку

$$-M \leqslant \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}{x - x_0} \leqslant M \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h \tag{20}$$

[ибо угловые коэффициенты всех звеньев нашей ломаной лежат, согласно условию (10), между $-M$ и M]. Из этой оценки следует, что

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Mh \leqslant b,$$

* См. п. **6**.

т. е.

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant b \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h. \qquad (21)$$

Давая n значения 1, 2, ..., мы получим последовательность ломаных Эйлера. Соответствующая ей последовательность функций:

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots \qquad (22)$$

будет удовлетворять обоим условиям теоремы Арцеля.

Действительно, при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ мы имеем для любого n оценку

$$|\varphi_n(x)| = |(\varphi_n(x) - y_0) + y_0| \leqslant |\varphi_n(x) - y_0| + |y_0| \leqslant b + |y_0|, \qquad (23)$$

так что функции $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены на промежутке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

Далее, эти функции равностепенно непрерывны в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$. В самом деле, в силу леммы мы имеем:

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| \leqslant M |x'' - x'| \qquad (24)$$

для любых x' и x'' из интервала $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$. Следовательно какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, мы для любого n будем иметь:

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| < \varepsilon, \qquad (25)$$

если

$$|x'' - x'| < \eta = \frac{\varepsilon}{M}, \qquad x_0 \leqslant x', \quad x'' \leqslant x_0 + h, \qquad (26)$$

а это и означает, что $\varphi_n(x)$ равностепенно непрерывны в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

По теореме Арцеля, из последовательности (22) можно выбрать подпоследовательность

$$\varphi_{n_1}(x), \ \varphi_{n_2}(x), \ \ldots, \ \varphi_{n_k}(x), \ \ldots, \qquad (27)$$

сходящуюся равномерно в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

Обозначим предельную функцию подпоследовательности (27) через $\varphi(x)$. Ясно, что кривая $y = \varphi(x)$ не выходит из области R_1.

Докажем, что $y = \varphi(x)$ будет искомым решением уравнения (8)*.

Заметим прежде всего, что начальное условие (12) выполняется автоматически, ибо все ломаные Эйлера проходят через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Чтобы убедиться в том, что $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (8) в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, покажем, что функция $\varphi(x)$ имеет производную в любой точке $\bar{x}$ интервала $[x_0, x_0 + h]$ и что эта производная равна $f(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$.

---

* Может случиться, как уже отмечено в п. **6**, что существует несколько подпоследовательностей типа (27), каждая из которых сходится к своей функции. Тогда мы найдем несколько решений уравнения (8), проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x, y)$ непрерывна в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, то найдется такая замкнутая область

$$R_1: \quad |x - \bar{x}| \leq \delta, \quad |y - \bar{y}| \leq \delta, \tag{28}$$

что для каждой точки (x, y) этой области выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{29}$$

Пусть

$$h_1 = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M}\right). \tag{30}$$

Возьмем приращение Δx, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < |\Delta x| \leq h_1, \tag{31}$$

и фиксируем его.

Выберем N_1 таким, чтобы при $k > N_1$ имело место неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h \tag{32}$$

(это возможно, ибо подпоследовательность (27) сходится к $\varphi(x)$ равномерно в интервале $[x_0, x_0 + h]$) и чтобы расстояние между абсциссами угловых точек ломаных $y = \varphi_{n_k}(x)$ было меньше $\frac{h_1}{2}$ $\left(\text{для этого достаточно взять } n_k > \frac{2h}{h_1}\right.$, так как расстояние между абсциссами угловых точек ломаной $y = \varphi_{n_k}(x)$ равно $\left.\frac{h}{n_k}\right)$.

Оценим разность

$$\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}). \tag{33}$$

Покажем сначала, что при $k > N_1$ все угловые точки ломаных $y = \varphi_{n_k}(x)$, абсциссы которых заключены между числами $\bar{x}$ и $\bar{x} + \Delta x$, лежат внутри области R_1. В самом деле, пусть сначала $\Delta x > 0$. Согласно выбору Δx и на основании леммы имеем:

$$|\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})| \leq h_1 M \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta x. \tag{34}$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем:

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leq h_1 M \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta x. \tag{35}$$

Теперь, принимая во внимание (32), при $k > N_1$, будем иметь:

$$|\varphi_{n_k}(x) - \bar{y}| = |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x) + \\ + \varphi(x) - \varphi(\bar{x})| < \frac{3\delta}{4} \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta x, \tag{36}$$

так что наше утверждение доказано для $0 \leqslant \Delta x \leqslant h_1$. Если $\Delta x < 0$, то левая часть интервала $[\bar{x} + \Delta x, \bar{x}]$ покрыта проекцией звена $M_{i-1} M_i$, где $x_{i-1} \leqslant \bar{x} + \Delta x < x_i$, но так как $x_i - x_{i-1} < \frac{h_1}{2}$, то

$$|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x)| < \frac{h_1}{2} M \leqslant \frac{\delta}{4M} M = \frac{\delta}{4}. \tag{37}$$

Теперь получаем:

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \bar{y}| = |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \\ &- \varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) + \varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x}) + \varphi_{n_k}(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})| < \delta, \\ &|x_{i-1} - \bar{x}| = |x_{i-1} - x_i + x_i - \bar{x}| < \frac{h_1}{2} + h_1 < \delta. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Таким образом, при $k > N_1$, все угловые точки ломаных $y = \varphi_{n_k}(x)$, абсциссы которых заключены между числами $\bar{x}$ и $\bar{x} + \Delta x$, лежат внутри области R_1. Но тогда угловые коэффициенты всех этих звеньев заключены, согласно (29), между числами $f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{2}$ и $f(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, в силу леммы, получаем:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} < f(x, \bar{y}) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{39}$$

так что искомая оценка разности (33) имеет вид

$$\left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Оценим теперь разность

$$\frac{\varphi(\bar{x} + \Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}). \tag{41}$$

При $k > N_1$ мы имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(\bar{x} + \Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \Bigg| \leqslant \\ &\leqslant \left| \frac{\varphi(\bar{x} + \Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} \right| + \\ &+ \left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \left| \frac{\varphi(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x)}{\Delta x} \right| + \\ &+ \left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Выберем такое число $N_2 > N_1$, чтобы при $k > N_2$ было

$$|\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < |\Delta x| \frac{\varepsilon}{4} \text{ для всех } x \text{ из } [x_0, x_0 + h]. \quad (43)$$

Тогда при $k > N_2$ получим:

$$\left| \frac{\varphi(\bar{x} + \Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \varepsilon, \quad (44)$$

где Δx фиксированное достаточно малое число. Оценка (44) показывает, что производная от $\varphi(x)$ в точке $x = \bar{x}$ существует и равна $f(\bar{x}, \bar{y})$. Так как $\bar{x}$ — любое число из интервала $[x_0, x_0 + h]$, то для всякого x из этого интервала мы имеем:

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]. \quad (45)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы изложили доказательство теоремы Пеано для области вида (9). Однако теорема Пеано остается в силе и для любой замкнутой области: *если правая часть уравнения* (8) *определена и непрерывна в замкнутой области $G(x, y)$, то через всякую* *в н у т р е н н ю ю* *точку этой области проходит хоть одна интегральная кривая уравнения* (8).

155. Теорема Пеано для нормальной системы. Доказанная теорема Пеано легко распространяется на нормальную систему n уравнений, а следовательно и на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Если правые части системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

определены и непрерывны в замкнутой области $G(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то через всякую *в н у т р е н н ю ю* *точку этой области проходит хоть одна интегральная кривая системы* (46).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

156. Предварительные замечания. В настоящей и во всех последующих главах, кроме последней, мы рассматриваем линейные дифференциальные уравнения любого порядка и системы линейных дифференциальных уравнений.

Эти уравнения представляют собою наиболее разработанную часть теории дифференциальных уравнений.

Объясняется это, с одной стороны, тем, что линейные уравнения и системы линейных уравнений обладают рядом замечательных свойств, значительно облегчающих построение и исследование решений. С другой стороны, интерес к разработке проблем теории линейных уравнений и систем линейных уравнений является следствием многочисленных приложений этих уравнений, так как выяснилось, что линейные уравнения либо описывают реальные процессы, либо дают так называемое первое приближение, и во многих случаях представляется возможным уже по этому первому приближению судить о характере изучаемого явления.

Линейным дифференциальным уравнением, как уже сказано в п. 82, называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

или уравнение более общего вида:

$$p_0(x)\,y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x). \tag{1'}$$

Если в уравнении (1′) $p_0(x) \neq 0$, то поделив на него, приходим к уравнению (1).

Предположим, что коэффициенты уравнения (1)

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ заданы и непрерывны в интервале (a, b). При этом предположении уравнение (1) имеет, согласно п. **129**, единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где $x=x_0$ — любая точка из интервала (a, b), а $y_0, y_0', \ldots, {}_0^{n-1}$ — любые заданные числа. Это решение определено и n раз дифференцируемо во всем интервале (a, b). Оно может быть найдено, например, по методу Пикара.

Существование общего решения уравнения (1) при наших предположениях относительно $p_k(x)$ и $f(x)$ вытекает из замечания 2 п. **137**. Особых решений линейное уравнение (1) не имеет. Всякое решение этого уравнения является частным решением.

Все сказанное относится, очевидно, и к линейному уравнению вида (1′), у которого коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b), причем ни в одной точке этого интервала коэффициент при старшей производной $p_0(x)$, не обращается в нуль. Точки, в которых $P_0(x)=0$, называются *особыми точками* уравнения (1′). Вопросы о существовании, об аналитических свойствах и о построении решений в окрестности таких точек изучаются в аналитической теории дифференциальных уравнений. Начальные сведения по этим вопросам читатель найдет в п. **191—193**.

Задачей настоящей главы является выяснение специфических общих свойств решений линейных уравнений и структуры общего решения, а также рассмотрение основных методов построения общего решения.

Если $f(x)\equiv 0$ в интервале (a, b), то уравнение (1) или (1′) называется однородным*. В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0. \quad (2)$$

Если же $f(x) \neq 0$ в интервале (a, b), то уравнение (1) или (1′) называется *неоднородным*.

В дальнейшем мы для сокращения записи введем в рассмотрение следующий *линейный дифференциальный оператор:*

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x)\, y. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться, что оператор $L(y)$ обладает следующими основными свойствами:

---

* См. п. **130**.

1°. Постоянный множитель можно выносить за знак оператора:

$$L(ky) = kL(y). \tag{4}$$

2°. Оператор от суммы двух функций равен сумме операторов от этих функций:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2). \tag{5}$$

Используя оператор (3), мы можем переписать неоднородное уравнение (1) в виде:

$$L(y) = f(x), \tag{6}$$

а однородное уравнение (2) — в виде:

$$L(y) = 0. \tag{7}$$

Функция $y = y(x)$ является решением неоднородного уравнения (1) в интервале (a, b), если оператор (3) от этой функции, $L[y(x)]$, тождественно равен $f(x)$ в интервале (a, b)

$$L[y(x)] \equiv f(x) \quad (a < x < b). \tag{8}$$

Функция $y = y(x)$ является решением однородного уравнения (2), если

$$L[y(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b). \tag{9}$$

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$y'' + y = 1. \tag{10}$$

Имеем: $L(y) = y'' + y$, $L(y) = 1$, $y = \sin x + 1$ — решение уравнения (10) в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо

$$L(\sin x + 1) = L(\sin x) + L(1) \equiv 1 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Пример 2. Для уравнения

$$y'' - y = 0 \tag{11}$$

имеем: $L(y) = y'' - y$, $L(y) = 0$, $y = e^x$ — решение уравнения (11) в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо

$$L(e^x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Отметим два общих свойства линейного уравнения.

157. Инвариантность линейного уравнения относительно любого преобразования независимой переменной. *Линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной*.*

В самом деле, положим

$$x = \varphi(t) \; [t = \psi(x)], \tag{12}$$

---

* Ср. п. 32.

где $\varphi(t)$ — любая функция от t, определенная и непрерывная вместе со своими производными до порядка n включительно в интервале (t_0, t_1), причем $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ во всем интервале (t_0, t_1). Тогда [32 (10)]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}, \tag{13}$$

так что производная по x получается умножением производной по t на $\frac{1}{\varphi'(t)}$.

Поэтому:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}\right] \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$$
$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{[\varphi'(t)]^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \tag{14}$$

т. е. $\frac{d^2y}{dx^2}$ выражается линейно и однородно через $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$. Нетрудно убедиться, что вообще $\frac{d^ky}{dx^k}$ выразится в виде линейной однородной функции от $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dt^k}$, коэффициенты которой непрерывны в интервале (t_1, t_2).

Следовательно, заменяя в уравнении (1) производные по x их выражениями через производные по t, а x — через $\varphi(t)$ и умножая обе части полученного уравнения на $[\varphi'(t)]^n$, мы придем опять к линейному уравнению, причем его коэффициенты и правая часть будут непрерывными функциями от t (в частности они могут оказаться и постоянными) в интервале (t_1, t_2).

Если удастся найти общее решение преобразованного уравнения, то, полагая в нем $t = \psi(x)$, мы получим общее решение данного уравнения.

Замечание. Выполняя подстановку $x = \varphi(t)$ в однородном линейном уравнении (2), мы, очевидно, снова получим однородное линейное уравнение.

158. Инвариантность линейного уравнения относительно линейного преобразования искомой функции. Покажем, что *линейное уравнение остается линейным при любой линейной замене искомой функции** .

Пусть

$$y = \alpha(x)\, z + \beta(x), \tag{15}$$

* Ср. п. **32**.

где z — новая неизвестная функция, а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — произвольные n раз непрерывно дифференцируемые функции от x, причем $\alpha(x) \neq 0$ в интервале (a, b). Тогда:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \alpha' z + \alpha z' + \beta', \\ y'' &= \alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z'' + \beta'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= \alpha^{(n)} z + n\alpha^{(n-1)} z' + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^{(n-2)} z'' + \ldots + \alpha z^{(n)} + \beta^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Поэтому, выполняя в уравнении (1) подстановку (15) и деля обе части полученного уравнения на $\alpha(x)$, мы придем снова к уравнению вида (1), коэффициенты и правая часть которого будут непрерывны в интервале (a, b).

Замечание 1. Очевидно, что выполняя подстановку

$$y = \alpha(x)\, z \qquad (17)$$

в однородном линейном уравнении, мы снова получим однородное линейное уравнение.

Замечание 2. Используя подстановку вида (17), уравнение (2) [и уравнение (1)] всегда можно привести к уравнению, не содержащему члена с производной $(n-1)$-го порядка. В самом деле, так как

$$y^{(n)} = \alpha z^{(n)} + n\alpha' z^{(n-1)} + \ldots, \quad y^{(n-1)} = \alpha z^{(n-1)} + \ldots, \qquad (18)$$

то после подстановки в уравнение (2) получаем:

$$\alpha z^{(n)} + [n\alpha' + p_1(x)\,\alpha]\, z^{(n-1)} + \ldots = 0. \qquad (19)$$

Чтобы уничтожить член, содержащий $z^{(n-1)}$, выберем $\alpha(x)$ так, чтобы $n\alpha' + p_1(x)\alpha = 0$, для чего достаточно положить

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx}. \qquad (20)$$

Итак, *подстановка*

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx} z \qquad (21)$$

приводит уравнение (2) *к уравнению, не содержащему члена с производной* $(n-1)$*-го порядка.*

§ 2. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n-го ПОРЯДКА

159. Свойства решений. В дальнейшем будет показано, что для интегрирования неоднородного линейного уравнения:

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

достаточно уметь найти общее решение однородного уравнения с той же левой частью:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)\; y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}\;(x)\, y' + p_n(x) y = 0. \qquad (2)$$

Поэтому мы начнем изложение общей теории линейных уравнений с изучения однородных линейных уравнений.

Наша окончательная задача состоит в нахождении всех вещественных решений уравнения (2). Однако для решения этой задачи иногда оказывается выгодно сначала найти некоторые комплексные решения.

Прежде чем дать понятие о комплексном решении уравнения (2) дадим определение комплексной функции вещественной переменной.

Функцию

$$z(x) = u(x) + iv(x), \qquad (3)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные функции от вещественной переменной x, а $i = \sqrt{-1}$, будем называть *комплексной функцией от вещественной переменной x*. Функции $u(x)$ и $v(x)$ называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* комплексной функции $z(x)$. Примером такой функции является

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad (4)$$

или функция более общего вида $e^{\alpha x}$, где $\alpha = a + ib$, причем a и b — вещественные:

$$e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = \\ = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx. \qquad (5)$$

Производная n-го порядка от функции $z(x)$ по вещественной переменной x, в предположении, что $u^{(n)}(x)$ и $v^{(n)}(x)$ существуют, определяется так:

$$z^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x). \qquad (6)$$

Вычислим производные от некоторых комплексных функций вещественной переменной.

1°. *При любом α, вещественном или комплексном, справедлива формула*

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}. \qquad (7)$$

При α вещественном эта формула известна. Пусть теперь $\alpha = a + ib$. Тогда в силу (5), имеем:

$$e^{\alpha x} = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx.$$

Отсюда, по данному выше определению производной, находим:

$$(e^{\alpha x})' = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx + i(ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx).$$

Группируя члены, получаем:

$$(e^{\alpha x})' = ae^{ax}\cos bx + iae^{ax}\sin bx + i\,(be^{ax}\cos bx + ibe^{ax}\sin bx) =$$
$$= ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + ibe^{ax}(\cos bx + i\sin bx) =$$
$$= ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ax}e^{ibx} = (a + ib)\ e^{(a+ib)x} =$$
$$= \alpha\, e^{\alpha x}.$$

2°. *При любом вещественном k и любом α вещественном или комплексном справедлива формула*

$$(x^k e^{\alpha x})' = (kx^{k-1} + \alpha x^k)\ e^{\alpha x}. \tag{8}$$

При α вещественном эта формула известна. Если $\alpha = a + ib$, то имеем:

$$x^k e^{\alpha x} = x^k e^{ax}\cos bx + ix^k e^{ax}\sin bx.$$

Поэтому:

$$(x^k e^{\alpha x})' = kx^{k-1}e^{ax}\cos bx + ax^k e^{ax}\cos bx - bx^k e^{ax}\sin bx +$$
$$+ i\,(kx^{k-1}e^{ax}\sin bx + ax^k e^{ax}\sin bx + bx^k e^{ax}\cos bx) =$$
$$= kx^{k-1}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + x^k e^{ax}(a + ib)\ \cos bx +$$
$$+ ix^k e^{ax}(a + ib)\ \sin bx = kx^{k-1}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) +$$
$$+ (a + ib)\ x^k e^{ax}e^{ibx} = kx^{k-1}e^{\alpha x} + \alpha x^k e^{\alpha x} =$$
$$= (kx^{k-1} + \alpha x^k)\ e^{\alpha x}.$$

3°. Используя формулу (8), убедимся, что *если $P_n(x)$ — полином n-ой степени от x, а α — любое вещественное или комплексное число, не равное нулю, то*

$$[P_n(x)\ e^{\alpha x}]' = \overline{P}_n(x)\ e^{\alpha x}, \tag{9}$$

где $\overline{P}_n(x)$ — некоторый полином n-й степени от x.

4°. *При любом α, вещественном или комплексном, справедлива формула*

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}. \tag{10}$$

При α вещественном эта формула известна. Если $\alpha = a + ib$, то по определению полагаем:

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a\ln x}\cdot e^{ib\ln x} =$$
$$= x^a\,[\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x)].$$

Поэтому

$$(x^\alpha)' = [x^a\cos(b\ln x)]' + i\,[x^a\sin(b\ln x)]' =$$
$$= ax^{a-1}\cos(b\ln x) - bx^{a-1}\sin(b\ln x) +$$
$$+ i\,[ax^{a-1}\sin(b\ln x) + bx^{a-1}\cos(b\ln x)] =$$
$$= \alpha\, x^{a-1}\cos(b\ln x) + i\,\alpha\, x^{a-1}\sin(b\ln x) =$$
$$= \alpha\, x^a\,[\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x)]\ x^{-1} =$$
$$= \alpha\, x^\alpha\cdot x^{-1} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Дадим теперь понятие о комплексном решении уравнения (2). Комплексная функция от вещественной переменной x

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \tag{11}$$

называется *комплексным решением* однородного линейного уравнения (2) в интервале (a, b), если подстановка ее в уравнение (2) обращает это уравнение в тождество, т. е. если

$$L[y(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b). \tag{12}$$

Покажем, что *всякое комплексное решение уравнения* (2) *порождает два вещественных решения этого уравнения, а именно: если комплексная функция $y(x)$ является решением уравнения* (2), *то ее вещественная и мнимая части являются вещественными решениями этого уравнения.*

В самом деле, пусть функция (11) есть решение уравнения (2). Тогда мы имеем тождество (12). Вычисляя $L[y(x)]$, мы имеем:

$$L[y(x)] = L[y_1(x) + iy_2(x)] = L[y_1(x)] + iL[y_2(x)].$$

Поэтому (12) можно переписать в виде

$$L[y_1(x)] + iL[y_2(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

откуда

$$L[y_1(x)] \equiv 0, \quad L[y_2(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

а это и означает, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (2) в интервале (a, b).

Пример 1. Уравнение

$$y'' + y = 0 \tag{13}$$

имеет комплексное решение

$$y(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{14}$$

ибо $(e^{ix})'' = -e^{ix}$, а тогда функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ являются вещественными решениями уравнения (13), в чем легко убедиться и непосредственно.

Установим теперь три замечательных свойства решений однородного линейного уравнения.

1°. *Если y_1 есть решение однородного линейного уравнения* (2), *т. е.*

$$L(y_1) \equiv 0, \tag{15}$$

то функция

$$y = Cy_1, \tag{16}$$

где C — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

В самом деле, мы имеем:

$$L(Cy_1) = CL(y_1).$$

Но $L(y_1) \equiv 0$, поэтому $L(Cy_1) \equiv 0$, а это и означает, что Cy_1 есть решение уравнения (2).

2°. *Если y_1 и y_2 — решения уравнения* (2), *то их сумма*

$$y = y_1 + y_2 \tag{17}$$

тоже является решением уравнения (2).

Действительно, мы имеем:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Но

$$L(y_1) \equiv 0, \quad L(y_2) \equiv 0.$$

Поэтому

$$L(y_1 + y_2) \equiv 0,$$

т. е. $y_1 + y_2$ — решение уравнения (2).

3°. *Если y_1, $y_2 \ldots$, y_m — решения уравнения* (2), *то их линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m, \tag{18}$$

где C_1, C_2, ..., C_m — произвольные постоянные, тоже является решением уравнения (2).

Это свойство следует из 1° и 2°.

Пример 2. Возьмем уравнение (13),

$$y'' + y = 0.$$

В примере 1 мы показали, что функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ являются частными решениями уравнения (13). Поэтому функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, тоже будет решением уравнения (13).

Поставим теперь основной вопрос: каковы должны быть n частных решений y_1, y_2, ..., y_n, чтобы формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{19}$$

содержащая n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, давала общее решение уравнения (2)? Чтобы ответить на этот вопрос, введем понятие о линейной независимости функций.

160. Понятие о линейной независимости функций. Функции y_1, y_2, ..., y_n называются *линейно независимыми* в интервале (a, b), если между ними не существует соотношения вида

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad \text{при} \quad a < x < b, \tag{20}$$

где α_1, α_2, ..., α_n — постоянные числа, не равные нулю одновременно. В противном случае функции y_1, y_2, ..., y_n называются *линейно зависимыми* в интервале (a, b).

Для случая двух функций y_1 и y_2 понятие линейной независимости в интервале (a, b) сводится, очевидно, к тому, чтобы отношение этих функций $\frac{y_1}{y_2}$ не было постоянным в интервале

(a, b); при этом имеется в виду, что это отношение определено во всех точках интервала (a, b).

Очевидно, *что, если одна из функций* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *тождественно равна нулю в интервале* (a, b), *то эти функции линейно зависимы в* (a, b).

В самом деле, пусть, например, $y_1 \equiv 0$ $(a<x<b)$. Тогда при любом $\alpha_1 \neq 0$ и при $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ будет выполняться соотношение (20), а это и означает, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы в (a, b).

Замечание. *Если функции*

$$y_1(x), \quad y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x) \tag{21}$$

линейно независимы в интервале (a, b), *то, заменив в них аргумент* x *новым аргументом* t *по формуле*

$$x = \varphi(t), \tag{22}$$

где $\varphi(t)$ — *дифференцируемая функция от* t, *причем ее производная* $\varphi'(t)$ *не обращается в нуль во всем интервале* (t_1, t_2), *соответствующем интервалу* (a, b), *мы получим функции*

$$y_1[\varphi(t)], \quad y_2[\varphi(t)], \ \ldots, \ y_n[\varphi(t)] \tag{23}$$

линейно независимые в интервале (t_1, t_2).

В самом деле, предложив, что существует соотношение вида $\alpha_1 y_1[\varphi(t)] + \alpha_2 y_2[\varphi(t)] + \ldots + \alpha_n y_n[\varphi(t)] = 0$ при $t_1 < t < t_2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — постоянные числа, среди которых хоть одно отлично от нуля, и, заменив $\varphi(t)$ на x, мы получили бы, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad a < x < b,$$

т. е. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы в интервале (a, b), вопреки предположению.

Пример 1. *Функции* $y_1 = 1, \quad y_2 = x, \ \ldots, \ y_n = x^{n-1}$ *линейно независимы в интервале* $(-\infty, +\infty)$ *и вообще в любом интервале.*

Действительно, соотношение

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0,$$

в котором не все α равны нулю, не может выполняться тождественно, ибо оно представляет собою уравнение $(n-1)$-й степени, а, как известно, уравнение $(n-1)$-й степени не может иметь больше $n-1$ различных корней.

Пример 2. *Функции* $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}$ *линейно независимы в любом интервале,* так как соотношение

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0,$$

где α_1 и α_2 не равны нулю одновременно, выполнимо не более чем в одной точке. Это следует также из того, что

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq \text{const}.$$

Пример 3. *Функции* $y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x$ *линейно независимы в любом интервале,* ибо соотношение

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0,$$

где α_1 и α_2 не равны нулю одновременно, не может выполняться тождественно ни в каком интервале.

Пример 4. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *— попарно различные числа (вещественные или комплексные). Тогда функции*

$$\left.\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, \; xe^{\lambda_1 x}, \; \ldots, \; x^{n_1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, \; xe^{\lambda_2 x}, \; \ldots, \; x^{n_2} e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x}, \; xe^{\lambda_m x}, \; \ldots, \; x^{n_m} e^{\lambda_m x}, \end{array}\right\} \tag{24}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *— целые неотрицательные числа,* ***линейно независимы в интервале*** $(-\infty, +\infty)$ *и вообще в любом интервале.*

Допустим противное, т. е. предположим, что существует соотношение вида

$$\begin{aligned} &\alpha_0^{(1)} e^{\lambda_1 x} + \alpha_1^{(1)} xe^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_{n_1}^{(1)} x^{n_1} e^{\lambda_1 x} + \\ &+ \alpha_0^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \alpha_1^{(2)} xe^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_{n_2}^{(2)} x^{n_2} e^{\lambda_2 x} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \alpha_0^{(m)} e^{\lambda_m x} + \alpha_1^{(m)} xe^{\lambda_m x} + \ldots + \alpha_{n_m}^{(m)} x^{n_m} e^{\lambda_m x} \equiv 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\alpha_i^{(k)}$ — постоянные числа, среди которых хоть одно отлично от нуля.

Соотношение (25) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{m} P_{n_k}(x)\, e^{\lambda_k x} \equiv 0, \tag{26}$$

где $P_{n_k}(x)$ — полином степени n_k, причем здесь не все полиномы $P_{n_k}(x)$ тождественно равны нулю.

Не умаляя общности, предположим, что $P_{n_m}(x) \not\equiv 0$. Тогда, умножая (26) на $e^{-\lambda_1 x}$, получим:

$$P_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{m} P_{n_k}(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} \equiv 0. \tag{27}$$

Дифференцируя это тождество n_1+1 раз по x, получим:

$$\sum_{k=2}^{m} P_{n_k}^{(1)}(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} \equiv 0, \tag{28}$$

причем $P_{n_m}^{(1)}(x) \not\equiv 0$ *.

Умножая (28) на $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$, получаем:

$$P_{n_2}^{(1)}(x) + \sum_{k=3}^{m} P_{n_k}^{(1)}(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_2)x} \equiv 0. \tag{29}$$

Дифференцируя это тождество n_2+1 раз, находим:

$$\sum_{k=3}^{m} P_{n_k}^{(2)}(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_2)x} \equiv 0, \tag{30}$$

---

* Ибо $P_{n_m}^{(1)}(x)$ есть полином той же степени, что и $P_{n_m}(x)$ [см. п. **159**, формула (9)].

причем $P_{n_m}^{(2)}(x) \not\equiv 0$.

Продолжая так далее, получим:

$$P_{n_m}^{(m-1)}(x)\, e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})\, x} = 0, \tag{31}$$

причем $P_{n_m}^{(m-1)}(x) \not\equiv 0$, что невозможно, где не все полиномы $P_{n_k}(x)$ тождественно равны нулю, предположению.

Таким образом, не существует соотношения вида (26), т. е. функции (24) линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

С помощью тех же рассуждений мы убеждаемся, что функции (24) линейно независимы и в любом конечном интервале (a, b).

Пример 5. *Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные числа (вещественные или комплексные), то функции*

$$\left.\begin{array}{llll} x^{\lambda_1}, & x^{\lambda_1}\ln x, & \ldots, & x^{\lambda_1}(\ln x)^{n_1}, \\ x^{\lambda_2}, & x^{\lambda_2}\ln x, & \ldots, & x^{\lambda_2}(\ln x)^{n_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{\lambda_m}, & x^{\lambda_m}\ln x, & \ldots, & x^{\lambda_m}(\ln x)^{n_m}, \end{array}\right\} \tag{32}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — целые неотрицательные числа, линейно независимы в интервале $(0, +\infty)$.

Действительно, полагая в функциях (32)

$$x = e^t, \tag{33}$$

мы получим вместо них функции типа (24):

$$\left.\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{n_1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \ldots, & t^{n_2}e^{\lambda_2 t}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda_m t}, & te^{\lambda_m t}, & \ldots, & t^{n_m}e^{\lambda_m t}, \end{array}\right\} \tag{34}$$

линейно независимые в интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно функции (32) линейно независимые в интервале $(0, +\infty)$, ибо они получаются из функций (34) заменой их аргумента по формуле $t = \ln x$

Очевидно, что функции (32) являются также линейно независимыми и во всяком конечном интервале (a, b) где $b > a > 0$.

Пример 6. *Функции $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ линейно зависимы в интервале* $(-\infty, +\infty)$, так как при всех x справедливо соотношение

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0, \tag{35}$$

так что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$.

Пример 7. *Функции $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^x$ линейно зависимы в интервале* $(-\infty, +\infty)$, так как $y_2 = 2y_1$ при всех x.

Пример 8. *Функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \operatorname{ch} x$ линейно зависимы в интервале* $(-\infty, +\infty)$, ибо $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

161. Необходимое условие линейной зависимости *n* функций.

Предположим, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеют производные порядка $n - 1$, и рассмотрим определитель:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Этот определитель называется *определителем Вронского* для функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ или *вронскианом* этих функций.

Теорема. *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы в интервале (a, b), то их вронскиан $W(x)$ тождественно равен нулю в этом интервале.*

Действительно, согласно условию теоремы, мы имеем равенство

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\dots+\alpha_n y_n=0 \qquad (a<x<b), \tag{37}$$

где не все α_i равны нулю. Пусть, например, $\alpha_n\neq 0$. Тогда:

$$y_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \qquad (a<x<b). \tag{38}$$

Дифференцируя это тождество $n-1$ раз и подставляя y_n и найденные значения $y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n-1)}$ в последний столбец определителя Вронского, получаем:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Разлагая определитель (39) на сумму определителей, будем иметь в каждом из них два пропорциональных столбца, вследствие чего все эти определители равны нулю, а тогда и $W(x)$ будет равен нулю во всех точках интервала (a, b).

Заметим, что *доказанное необходимое условие линейной зависимости n функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ не является, вообще говоря, достаточным.*

Пример. Пусть даны две функции

$$y_1=\begin{cases} x^2 & \text{для } x\leqslant 0, \\ 0 & \text{для } x\geqslant 0; \end{cases} \qquad y_2=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0, \\ x^2 & \text{для } x\geqslant 0. \end{cases} \tag{40}$$

Тогда $W(x)=0$ при всех x. Однако y_1 и y_2 линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$ или $(-a, +a)$, так как $\frac{y_2}{y_1}=0$ для $x<0$ и $\frac{y_2}{y_1}=\infty$ для $x>0$.

162. Необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородного линейного уравнения n-го порядка. Пусть теперь каждая из функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ есть решения уравнения (2). Тогда относительно вронскиана этих функций имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть линейно независимые решения уравнения* (2), *все коэффициенты которого непрерывны в интервале* (a, b), *то вронскиан этих решений* $W(x)$ *не равен нулю ни в одной точке интервала* (a, b).

Допустим противное. Пусть $W(x_0)=0$, причем $a<x_0<b$. Составим систему n уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 (y_1)_0 + C_2 (y_2)_0 + \ldots + C_n (y_n)_0 = 0, \\ C_1 (y_1')_0 + C_2 (y_2')_0 + \ldots + C_n (y_n')_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 (y_1^{(n-1)})_0 + C_2 (y_2^{(n-1)})_0 + \ldots + C_n (y_n^{(n-1)})_0 = 0, \end{array}\right\} \tag{41}$$

где $(f)_0$ есть значение функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, так что, например, имеем: $(y_1)_0=y_1(x_0)$.

Определитель системы (41) есть как раз $W(x_0)$ и, так как он равен нулю, то эта система имеет ненулевое решение:

$$C_1=C_1^{(0)}, \quad C_2=C_2^{(0)}, \ \ldots, \ C_n=C_n^{(0)},$$

так что:

$$\left.\begin{array}{l} C_1^{(0)} (y_1)_0 + C_2^{(0)} (y_2)_0 + \ldots + C_n^{(0)} (y_n)_0 = 0, \\ C_1^{(0)} (y_1')_0 + C_2^{(0)} (y_2')_0 + \ldots + C_n^{(0)} (y_n')_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^{(0)} (y_1^{(n-1)})_0 + C_2^{(0)} (y_2^{(n-1)})_0 + \ldots + C_n^{(0)} (y_n^{(n-1)})_0 = 0, \end{array}\right\} \tag{42}$$

причем не все $C_i^{(0)}$ равны нулю.

Составим теперь следующую линейную комбинацию решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n. \tag{43}$$

Согласно третьему свойству решений однородного линейного уравнения, эта комбинация тоже есть решение уравнения (2). Равенства (42) показывают, что в точке $x=x_0$ решение (43) обращается в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка. Но тогда, в силу теоремы единственности* решение (43) является нулевым, $y\equiv 0$, т. е. мы имеем тождество

$$C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n = 0 \quad (a < x < b),$$

в котором не все $C_i^{(0)}$ равны нулю, а это означает, что решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, линейно зависимы в интервале (a, b), вопреки предположению. Теорема доказана.

---

* См. п. 130.

Из доказанной теоремы и теоремы предыдущего пункта следует, что *для того, чтобы n решений уравнения (2) были линейно независимы в интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался в нуль ни в одной точке этого интервала.*

В самом деле, если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы в интервале (a, b), то $W(x) \neq 0$ в (a, b). Обратно, если $W(x) \neq 0$ в (a, b), то решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы в интервале (a, b), ибо в противном случае $W(x)$ был бы равен нулю во всем интервале (a, b).

Однако оказывается, что для установления линейной независимости n решений уравнения (2) достаточно убедиться, что $W(x)$ не обращается в нуль хоть в одной точке интервала (a, b). Это вытекает из следующих двух замечательных свойств вронскиана n решений однородного линейного уравнения n-го порядка.

1°. *Если вронскиан n решений уравнения (2) равен нулю в одной точке $x=x_0$ из интервала (a, b), в котором все коэффициенты уравнения (2) непрерывны, то он равен нулю во всех точках этого интервала.*

Действительно, если $W(x_0)=0$, то по только что доказанной теореме функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы в интервале (a, b), а тогда, по теореме предыдущего пункта, вронскиан $W(x)$ тождественно равен нулю во всем интервале (a, b).

2°. *Если вронскиан n решений уравнения (2) отличен от нуля в одной точке $x=x_0$ интервала (a, b), то он отличен от нуля во всех точках этого интервала.*

В самом деле, если бы $W(x)$ обратился в нуль в некоторой точке интервала (a, b), то, по свойству 1°, он равнялся бы нулю во всех точках интервала (a, b), в том числе и в точке $x=x_0$, что противоречит предположению.

Таким образом, *для линейной независимости n решений уравнения (2) в интервале (a, b), в котором все коэффициенты уравнения (2) непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля хоть в одной точке этого интервала.*

Отсюда следует, что *если n решений уравнения (2) линейно независимы в интервале (a, b), то они будут линейно независимыми и во всяком частичном интервале (a_1, b_1), содержащемся в (a, b).*

163. Формула Остроградского—Лиувилля. Установленные выше свойства вронскиана решений однородного линейного уравнения n-го порядка (2) легко получаются из следующей замечательной *формулы Остроградского — Лиувилля*, выражающей (с точностью до постоянного множителя) вронскиан решений этого уравнения через коэффициент при производной $(n-1)$-го порядка:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx}, \tag{44}$$

где $x = x_0$ — любая точка из интервала (a, b).

Докажем формулу (44). Мы имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \ldots, & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируем этот определитель, применяя правило дифференцирования по строкам, согласно которому производная от определителя n-го порядка равна сумме n определителей, получающихся из него поочередной заменой элементов 1-й, 2-й, . . . , n-й строк их производными*. Так как все эти определители, кроме последнего, очевидно, равны нулю, то будем иметь

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первых $n-1$ строк соответственно на $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$, $\ldots$, $p_2(x)$ и прибавляя к элементам последней строки, мы, в силу дифференциального уравнения (2), получаем:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \ldots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x)\, W(x)$$

или

$$W'(x) + p_1(x)\, W(x) = 0, \tag{45}$$

откуда и следует формула (44) [33, (19)].

В частности, для вронскиана решений однородного линейного уравнения второго порядка:

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М. — Л., Гостехиздат, 1947, п. 172.

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0 \tag{2'}$$

при условии, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b), будем иметь:

$$W(x) = W(x_0)\ e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx}. \tag{44'}$$

Если при этом $p(x) \equiv 0$, то $W(x) = W(x_0) = \text{const}$.

Из формулы (44) видно, что если $W(x_0) = 0$, то $W(x) \equiv 0$ во всем интервале (a, b). Если же $W(x_0) \neq 0$, то $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала (a, b).

164. Понятие о фундаментальной системе решений. Совокупность n решений однородного уравнения (2), определенных и линейно независимых в интервале (a, b), называется *фундаментальной системой решений* в этом интервале. Из предыдущего следует, что *для того, чтобы система n решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан этих решений был отличен от нуля хоть в одной точке интервала непрерывности коэффициентов уравнения* (2). Все решения, входящие в фундаментальную систему, очевидно, ненулевые.

Пример. Для уравнения

$$y'' + y = 0 \tag{46}$$

функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как эти функции удовлетворяют уравнению (46) и линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$ **[160**, пример 3]. Теперь мы можем убедиться в линейной независимости этих решений еще и при помощи вронскиана. В самом деле, мы имеем:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{47}$$

Уравнение (46) имеет и другие фундаментальные системы решений. Например, всякая пара функций вида $y_1 = k \cos x$, $y_2 = k \sin x$, где k — любое постоянное число, не равное нулю, будет фундаментальной системой решений уравнения (46).

165. Доказательство существования фундаментальной системы решений. На примере уравнения (46) мы показали, что однородное линейное уравнение может иметь бесконечное множество фундаментальных систем. Ответ на вопрос о существовании фундаментальной системы решений уравнения (2) общего вида дается следующей теоремой.

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (2) *непрерывны в интервале* (a, b), *то существует фундаментальная система решений, определенных в этом интервале.*

Действительно, возьмем точку $x = x_0$ из интервала (a, b) и построим, применяя метод Пикара, решение y_1 с начальными условиями:

$$y_1 = 1,\ \ y_1' = 0,\ \ y_1'' = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{48}$$

Затем, применяя снова метод Пикара, построим решение y_2

с начальными условиями:

$$y_2 = 0,\ y_2' = 1,\ y_2'' = 0,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \tag{49}$$

и т. д. Наконец, построим решение y_n с начальными условиями:

$$y_n = 0,\ y_n' = 0,\ y_n'' = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)} = 1 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{50}$$

Вычисляя вронскиан построенных решений в точке $x = x_0$, получаем:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{51}$$

Следовательно, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений, каждое из которых, согласно теореме Пикара, определено в интервале (a, b).

Из самого метода доказательства видно, что *существует бесконечное множество фундаментальных систем.*

В самом деле, в равенствах (48)—(50) мы можем взять вместо 1 и 0 любые n^2 чисел, определитель из которых не нуль. Тогда $W(x_0) \neq 0$, и, следовательно, мы опять получим фундаментальную систему решений.

Фундаментальная система решений с начальными условиями (48)—(50) (построенная нами при доказательстве теоремы) называется *нормированной* в точке $x = x_0$. *Для всякого однородного линейного уравнения вида* (2) *с непрерывными коэффициентами существует одна и только одна фундаментальная система решений, нормированная в любой заданной точке интервала непрерывности коэффициентов.*

Замечание. *Если коэффициенты уравнения* (2) *голоморфны в области* $|x - x_0| < \rho$ $(0 < \rho \leqslant +\infty)$, *то* применяя теорему Коши п. **151**, так же как и выше, убеждаемся, что *существует фундаментальная система решений, голоморфных по крайней мере в этой же области.* В частности, *существует одна и только одна фундаментальная система решений, голоморфных в области* $|x - x_0| < \rho$, *нормированная в точке* $x = x_0$.

166. Построение общего решения. Значение n линейно независимых решений, т. е. фундаментальной системы решений, дает возможность построить решение уравнения (2), содержащее n произвольных постоянных, причем это решение будет общим решением. А именно, имеет место следующая теорема.

Основная теорема. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — *фундаментальная система решений уравнения* (2), *то формула*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{52}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные числа, дает о б щ е е р е ш е н и е *уравнения* (2) *в области*

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}| < +\infty, \tag{53}$$

т. е. во всей области задания уравнения (2).

Действительно, система, состоящая из равенства (52) и равенств, полученных $(n-1)$ — кратным дифференцированием этого равенства:

$$\left.\begin{array}{l} y \quad = C_1y_1 \quad + C_2y_2 \quad + \ldots + C_ny_n, \\ y' \quad = C_1y_1' \quad + C_2y_2' \quad + \ldots + C_ny_n', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{54}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в области (53), ибо (54) есть линейная система, причем ее определитель, будучи равным $W(x)$, отличен от нуля, так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ есть фундаментальная система решений.

Кроме того, по третьему свойству решений однородного линейного уравнения функция (52) является решением уравнения (2) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Поэтому, согласно определению общего решения уравнения n-го порядка, данного в п. 88, функция (52) является общим решением уравнения (2) в области (53).

Формула (52) содержит в себе в с е решения уравнения (2). Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{55}$$

где $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ — любая точка области (53), нужно подставить начальные данные в систему (54) (т. е. заменить в ней переменные величины $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ соответственно числами $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$):

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \quad = C_1(y_1)_0 \quad + C_2(y_2)_0 \quad + \ldots + C_n(y_n)_0, \\ y_0' \quad = C_1(y_1')_0 \quad + C_2(y_2')_0 \quad + \ldots + C_n(y_n')_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} = C_1(y_1^{(n-1)})_0 + C_2(y_2^{(n-1)})_0 + \ldots + C_n(y_n^{(n-1)})_0. \end{array}\right\} \tag{56}$$

Разрешая эту систему относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (что возможно, ибо определитель ее, будучи равным $W(x_0)$, отличен от нуля), получим:

$$C_1 = C_1^{(0)},\quad C_2 = C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n = C_n^{(0)}. \tag{57}$$

Подставляя эти значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в общее решение (52) найдем:

$$y = C_1^{(0)}y_1 + C_2^{(0)}y_2 + \ldots + C_n^{(0)}y_n. \tag{58}$$

Это и есть искомое решение. Других решений с теми же начальными условиями (55) нет.

Из формулы (58) мы видим, что всякое частное решение однородного линейного уравнения (2) (а, следовательно, и вообще всякое решение этого уравнения) представляет собою линейную комбинацию с постоянными коэффициентами из частных решений, составляющих фундаментальную систему решений.

Постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определяемые из системы (56), являются линейными функциями от начальных значений $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Эти функции будут наиболее простыми, если фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, нормирована в точке $x=x_0$ (в которой заданы начальные значения решения).

Действительно, в этом случае система (56) принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1, \\ y_0' &= C_2, \\ &\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} &= C_n, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

так что произвольные постоянные суть не что иное, как сами начальные значения искомого частного решения. Поэтому решение с начальными условиями (55) выражается через нормированную фундаментальную систему решений формулой

$$y = y_0 y_1 + y_0' y_2 + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n. \tag{60}$$

Из сказанного ясно также, что *формулу* (60) *можно рассматривать как общее решение уравнения* (2) *в форме Коши:* роль произвольных постоянных играют начальные значения решения в фиксированной точке $x=x_0$ из интервала непрерывности коэффициентов $p_k(x)$.

Доказанная основная теорема и дает ответ на вопрос, поставленный в конце п. **159**: *для возможности получения общего решения уравнения* (2) *с помощью формулы* (19) *необходимо и достаточно, чтобы решения* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *были линейно независимы в интервале* (a, b), *т. е., чтобы они составляли фундаментальную систему решений.*

Отметим еще, что общее решение однородного линейного уравнения представляет собой линейную функцию от произвольных постоянных.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 0. \tag{61}$$

Выше мы убедились, что $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ есть фундаментальная система решений этого уравнения в интервале $(-\infty, +\infty)$. Поэтому, согласно основной теореме, формула

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{62}$$

дает общее решение уравнения (61) во всем пространстве (x, y, y').

Фундаментальная система решения $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ нормирована в точке $x=0$. Поэтому решение с начальными условиями $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=0$ дается формулой

$$y=y_0\cos x+y_0'\sin x. \tag{63}$$

Эта формула при произвольных y_0 и y_0' представляет собою общее решение уравнения (61) в форме Коши во всем пространстве (x, y, y').

Пример 2. Дано уравнение

$$y''-y=0. \tag{64}$$

Легко догадаться, что функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-x}$ являются решениями этого уравнения. Так как они линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, то

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x} \tag{65}$$

есть общее решение во всем пространстве (x, y, y').

Фундаментальная система решений $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ не нормирована в точке $x=0$. Построим фундаментальную систему решений, нормированную в этой точке. Пусть это будет $\overline{y}_1=\overline{y}_1(x)$, $\overline{y}_2=\overline{y}_2(x)$. Решения $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ являются линейными комбинациями решений y_1 и y_2 с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}\overline{y}_1&=a_{11}e^x+a_{12}e^{-x},\\ \overline{y}_2&=a_{21}e^x+a_{22}e^{-x},\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

где постоянные a_{ik} надо выбрать так, чтобы:

$$\left.\begin{aligned}\overline{y}_1&=1, \quad \overline{y}_1'=0 \quad \text{при} \quad x=0,\\ \overline{y}_2&=0, \quad \overline{y}_2'=1 \quad \text{при} \quad x=0.\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Удовлетворяя этим условиям, приходим к двум алгебраическим системам:

$$\left.\begin{aligned}1&=a_{11}+a_{12},\\ 0&=a_{11}-a_{12};\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}0&=a_{21}+a_{22},\\ 1&=a_{21}-a_{22}.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Решая эти системы, находим: $a_{11}=a_{12}=\dfrac{1}{2}$, $a_{21}=\dfrac{1}{2}$, $a_{22}=-\dfrac{1}{2}$, так что:

$$\overline{y}_1=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch}x, \quad \overline{y}_2=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x. \tag{69}$$

Таким образом, гиперболические функции $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$ представляют собою фундаментальную систему решений уравнения (64), нормированную в точке $x=0$, подобно тому, как тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (61), нормированную в этой точке.

Поэтому функция

$$y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x \tag{70}$$

есть так же, как и функция (65), общее решение уравнения (64) во всем пространстве (x, y, y').

Решение уравнения (64) с начальными условиями $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=0$ имеет вид

$$y=y_0\operatorname{ch}x+y_0'\operatorname{sh}x. \tag{71}$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение Бесселя*

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \quad (x \neq 0). \tag{72}$$

Нетрудно проверить, что $y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ есть фундаментальная система решений уравнения (72) в интервале $(0, \infty)$. Поэтому

$$y = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \tag{73}$$

есть общее решение уравнения (72) в области

$$0 < x < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty. \tag{74}$$

167. Число линейно независимых решений однородного линейного уравнения n-го порядка. *Уравнение* (2) *не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.* Действительно, пусть мы имеем $n+1$ частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$. Рассмотрим первые n решений. Если они линейно зависимы, то и все наши $n+1$ решений линейно зависимы, ибо мы имеем соотношение

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0 \quad (a < x < b), \tag{75}$$

где не все α_i равны нулю. Если же решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, то, согласно основной теореме, всякое решение, в том числе и y_{n+1}, выражается линейно через $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{n+1} = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n, \tag{76}$$

так что решения $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ снова оказываются линейно зависимыми.

168. Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений. Выше мы убедились, что уравнение (2), коэффициенты которого непрерывны в промежутке (a, b), имеет n и только n линейно независимых в этом промежутке решений. Покажем, что обратно: *всякой системе n раз непрерывно дифференцируемых и линейно независимых в интервале (a, b) функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, вронскиан которых не равен нулю ни в одной точке этого интервала, соответствует одно и только одно однородное линейное уравнение n-го порядка вида* (2), *для которого эта система функций будет фундаментальной системой решений в интервале (a, b).*

Коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ искомого уравнения должны удовлетворять системе:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1^{(n)} + p_1(x)\, y_1^{(n-1)} + p_2(x)\, y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y_1' + p_n(x)\, y_1 = 0,\\
&y_2^{(n)} + p_1(x)\, y_2^{(n-1)} + p_2(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y_2' + p_n(x)\, y_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n^{(n)} + p_1(x)\, y_n^{(n-1)} + p_2(x)\, y_n^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y_n' + p_n(x)\, y_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

---

* Это уравнение есть частный случай уравнения Бесселя общего вида $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0$.

Определитель этой системы равен $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot W(x)$ *. Так как он отличен от нуля, то искомые коэффициенты определятся единственным образом.

Искомое уравнение можно получить еще так. Заметим, что для совместности системы (77) и уравнения (2) должно выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad a < x < b \tag{78}$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad a < x < b. \tag{79}$$

Разлагая определитель в (79) по элементам последнего столбца и деля все члены полученного уравнения на $W(x)$, мы и получим искомое уравнение. В самом деле, из равенства (79) видно, что функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ являются решениями этого уравнения (ибо при замене y соответственно на $y_1, y_2, \dots, y_n$ мы всегда будем получать определитель с двумя равными столбцами), а так как этими решениями уравнение (2) определяется единственным образом, то полученное нами уравнение (79) и является искомым.

Таким образом, коэффициенты уравнения (2) выражаются единственным образом через его фундаментальную систему решений. Этот факт используется, например, в аналитической теории дифференциальных уравнений для построения дифференциального уравнения, фундаментальная система решений которого имеет заданную аналитическую структуру.

Выразим, в частности, коэффициенты линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{80}$$

через его фундаментальную систему решений y_1, y_2. В этом случае система (77) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 = 0, \\ y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

* $\left[\frac{n}{2}\right]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{n}{2}$.

Решая ее, находим:

$$p(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \quad q(x) = -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1' W'(x)}{y_1 W(x)}. \tag{82}$$

Следовательно, *фундаментальной сиситеме решений* y_1, y_2 *соответствует уравнение*

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)} y' + \left(-\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'}{y_1} \frac{W'(x)}{W(x)}\right) y = 0. \tag{83}$$

Пример 1. Рассмотрим функции

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Эти функции линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$ и их вронскиан $W(x)=1$, так что он отличен от нуля при всех x. Подставляя рассматриваемые функции в формулы (82), получаем: $p(x)=0$, $q(x)=1$. Следовательно, соответствующим дифференциальным уравнением будет:

$$y'' + y = 0. \tag{84}$$

Функции $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (84) во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

З а м е ч а н и е. Требование необращения в нуль вронскиана $W(x)$ во всем интервале (a, b), где функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, можно отбросить. Но тогда хоть один из коэффициентов полученного уравнения будет разрывным в той точке, в которой $W(x)=0$.

Пример 2. Даны функции

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2.$$

Эти функции линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$. Однако их вронскиан $W(x)=x^2$ обращается в нуль в точке $x=0$. По формулам (82) находим: $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^2}$. Поэтому соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь следующий вид:

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0. \tag{85}$$

Здесь коэффициенты $p(x) = -\frac{2}{x}$ и $q(x) = \frac{2}{x^2}$ разрывны в точке $x=0$, как и следовало ожидать, ибо $W(0)=0$. Заданные функции $y_1=x$, $y_2=x^2$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (85) в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Соответственно этому получим два общих решения: одно в области:

$$-\infty < x < 0, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \tag{86}$$

другое — в области

$$0 < x < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty. \tag{87}$$

Оба эти общие решения имеют одно и то же аналитическое выражение

$$y = C_1 x + C_2 x^2. \tag{88}$$

Здесь оба частные решения $y_1=x$, $y_2=x^2$ голоморфны в окрестности особой точки $x=0$. Заметим, однако, что о с о б а я точка $x=0$ обладает тем характерным свойством, что не существует решения уравнения (85), стремящегося при $x \to 0$ к постоянному числу, отличному от нуля, в то время как для всякой н е о с о б о й точки такое решение существует.

169. Понижение порядка однородного линейного уравнения при помощи линейно независимых частных решений. Предположим, что коэффициенты уравнения (2) непрерывны в интервале (a, b). Покажем, что *если известно одно* *ненулевое* *частное решение* y_1 *уравнения* (2), *то мы можем понизить порядок этого уравнения на одну единицу.*

Для этого введем новую неизвестную функцию u по формуле

$$y = y_1 \int u\,dx \quad \text{или} \quad u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{89}$$

Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} y' = y_1' \int u\,dx + y_1 u, \\ y'' = y_1'' \int u\,dx + 2y_1' u + y_1 u', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u\,dx + n y_1^{(n-1)} \cdot u + \dfrac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{90}$$

так что уравнение (2) преобразуется в уравнение вида

$$L(y_1) \int u\,dx + b_{n-1}(x)\, u + b_{n-2}(x)\, u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)} = 0. \tag{91}$$

Так как $L(y_1) \equiv 0$, то для u мы получаем однородное линейное уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$u^{(n-1)} + \overline{b}_1(x)\, u^{(n-2)} + \ldots + \overline{b}_{n-2}(x)\, u' + \overline{b}_{n-1}(x)\, u = 0. \tag{92}$$

Коэффициенты этого уравнения непрерывны во всем интервале (a, b), за исключением, быть может, тех точек, где y_1 обращается в нуль.

Если $u_2, \ldots, u_n$ есть фундаментальная система решений уравнения (92), то функции

$$y_1, \; y_1 \int u_2\,dx, \; \ldots, \; y_1 \int u_n\,dx \tag{93}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

В самом деле, из предыдущего ясно, что все функции (93) являются решениями уравнения (2). Предположим, что они линейно зависимы. Тогда имеем тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \int u_2\,dx + \ldots + \alpha_n y_1 \int u_n\,dx = 0,$$

причем не все $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю*. Сокращая это тождество на y_1 и дифференцируя, получим:

$$\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0,$$

т. е. $u_2, \ldots, u_n$ линейно зависимы, вопреки предположению.

Пример. Дано уравнение

* Ибо, если все $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю, то тогда и $\alpha_1 = 0$, так как $y_1 \neq 0$.

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0 \quad (x \neq 0). \tag{94}$$

Очевидно, что $y_1 = x$ является его частным решением. Полагая в уравнении (94)

$$y = x \int u\,dx, \tag{95}$$

получим уравнение

$$xu'' = 0 \quad \text{или} \quad u'' = 0 \tag{96}$$

(так как $x \neq 0$), для которого мы знаем два линейно независимых частных решения: $u_1 = 1$, $u_2 = x$. Поэтому линейно независимыми частными решениями данного уравнения будут:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \int 1\,dx = x^2, \quad y_3 = x \int x dx = \frac{x^3}{2} \quad \text{или} \quad y_3 = x^3. \tag{97}$$

Следовательно, формула

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \tag{98}$$

дает общее решение уравнения (94) в каждой из областей:

$$\left.\begin{aligned} -\infty < x < 0, \quad & |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ |y''| < +\infty; \\ 0 < x < +\infty \quad & |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ |y''| < +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Если мы знаем k линейно независимых частных решений уравнения (2), $y_1, y_2, \ldots, y_k$, *то порядок этого уравнения можно понизить на k единиц, причем полученное уравнение $(n-k)$-го порядка остается линейным и однородным.*

Действительно, выполняя подстановку (89), мы получим для u уравнение (92) порядка $n-1$.

Для уравнения (92) мы имеем $k-1$ решений, получаемых из формулы (89) поочередной заменой y на $y_2, y_3, \ldots, y_k$:

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_3 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ \ldots, \ u_k = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'. \tag{100}$$

Эти решения линейно независимы, ибо в противном случае мы имели бы тождество

$$\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0,$$

где не все $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны нулю. Интегрируя это тождество, мы получили бы

$$C_1 + \alpha_2 \int u_2\,dx + \ldots + \alpha_k \int u_k\,dx = 0.$$

Отсюда:

$$C_1 + \alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + \ldots + \alpha_k \frac{y_k}{y_1} = 0,$$

$$C_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k = 0,$$

чего быть не может, так как $y_1, y_2, \ldots, y_k$ линейно независимы.

Введем теперь новую функцию v с помощью равенства

$$u = u_2 \int v\,dx \quad \text{или} \quad v = \left(\frac{u}{u_2}\right)'. \tag{101}$$

Тогда для v получим по предыдущему уравнению $(n-2)$-го порядка, у которого мы знаем $k-2$ линейно независимых решений:

$$v_3 = \left(\frac{u_3}{u_2}\right)', \ \ldots, \ v_k = \left(\frac{u_k}{u_2}\right)'. \tag{102}$$

Продолжая так дальше, мы получим однородное линейное уравнение $(n-k)$-го порядка. В частности, *если мы знаем $n-1$ линейно независимых частных решений уравнения* (2), *то мы придем изложенным выше способом к однородному линейному уравнению первого порядка*. Таким образом, *знание $n-1$ линейно независимых частных решений уравнения* (2) *дает возможность проинтегрировать это уравнение в квадратурах*. Отсюда следует, что *для интегрирования однородного линейного уравнения второго порядка достаточно знать одно (ненулевое) частное решение** .

§ 3. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n-го ПОРЯДКА

170. Структура общего решения неоднородного уравнения. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x). \tag{1}$$

Относительно коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правой части $f(x)$ мы предполагаем** , что они непрерывны в интервале (a, b).

Предположим, что для уравнения (1) нам удалось найти частное решение y_1, так что мы имеем тождество

$$y_1^{(n)} + p_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y_1 \equiv f(x), \tag{2}$$

или

$$L(y_1) \equiv f(x). \tag{2'}$$

Введем новую неизвестную функцию z по формуле

$$y = y_1 + z. \tag{3}$$

Подставляя функцию (3) в уравнение (1), получим:

$$L(y_1 + z) = f(x).$$

Но $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z)$, так что мы имеем

$$L(y_1) + L(z) = f(x), \tag{4}$$

откуда, в силу (2′), находим, что z должна удовлетворять

* См. п. 188.

** См. п. 156.

уравнению

$$L(z) = 0 \tag{5}$$

или

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + p_2(x) z^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z = 0. \tag{5'}$$

Это уравнение называется *однородным линейным уравнением n-го порядка, соответствующим неоднородному уравнению* (1).

Общее решение однородного уравнения (5) дается формулой

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n, \tag{6}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — некоторая фундаментальная система решений этого уравнения, а $C_1, C_2, \ldots,$ — произвольные постоянные.

Подставляя (6) в (3), получаем:

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n. \tag{7}$$

Все решения уравнения (1) содержатся в формуле (7). *Эта формула представляет собою* ***общее решение*** *уравнения* (1) *в области*

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \ \ldots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty, \tag{8}$$

т. е. во всей области задания уравнения (1) (почему?).

Таким образом, *для нахождения* ***общего решения*** *неоднородного уравнения* (1) *достаточно найти одно какое-нибудь частное решение этого уравнения и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения* (5).

Замечание 1. *Пусть правая часть неоднородного уравнения* (1) *представляет собою сумму двух слагаемых**, *так что оно имеет вид:*

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{9}$$

Предположим, что y_1 — частное решение уравнения

$$L(y) = f_1(x), \tag{10}$$

а y_2 — частное решение уравнения

$$L(y) = f_2(x). \tag{11}$$

Тогда $y_1 + y_2$ является частным решением уравнения (9).

В самом деле, мы имеем

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Но так как $L(y_1) \equiv f_1(x)$, $L(y_2) \equiv f_2(x)$, то

$$L(y_1 + y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

т. е. $y_1 + y_2$ есть частное решение уравнения (9).

---

* Доказываемое ниже распространяется и на случай m слагаемых.

Пример. Пусть дано уравнение

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x. \tag{12}$$

Уравнение

$$y'' + 2y = 2$$

имеет частное решение $y_1 = 1$.

Уравнение

$$y'' + 2y = 3e^x$$

имеет частное решение $y_2 = e^x$. Поэтому $y = 1 + e^x$ будет частным решением уравнения (12).

Замечание 2. Пусть известно m частных решений неоднородного уравнения (1): $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Положим $y = y_1 + z$. Отсюда получаем $m - 1$ частных решений соответствующего однородного уравнения (5): $z_k = y_k - y_1$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$. Если эти решения линейно независимы в (a, b), то порядок неоднородного уравнения (1) можно понизить на $m - 1$ единиц. При этом нужно воспользоваться той же последовательностью замен искомой функции, что и при рассмотренном в п. 169 понижении порядка однородного уравнения. Так, первой заменой будет $y = z_2 \int u dx$. Она приводит уравнение (1) к неоднородному уравнению $(n - 1)$-го порядка.

171. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Покажем, что *общее решение неоднородного уравнения* (1) *можно найти в квадратурах, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения* (5).

Будем искать общее решение уравнения (1) в таком же виде, как и общее решение соответствующего однородного уравнения (5), заменяя произвольные постоянные некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями от x, т. е. положим:

$$y = C_1(x) z_1 + C_2(x) z_2 + \ldots + C_n(x) z_n, \tag{13}$$

где $z_1, z_2 \ldots, z_n$ — некоторая фундаментальная система решений уравнения (5).

Выберем функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ так, чтобы функция y, определяемая формулой (13), была общим решением уравнения (1).

Искомые функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ подчинены только одному соотношению, которое получается в результате подстановки функции (13) в уравнение (1). Поэтому для определения этих функций мы можем подчинить их любым $n - 1$ условиям.

Чтобы получить систему для определени $C_i(x)$ наиболее простой, мы будем, вычисляя последовательные производные $y', \ldots, y^{(n-1)}$ от выражения (13), всякий раз полагать равной нулю совокупность членов, содержащих $C_i'(x)$. Таким образом, мы придем к следующим равенствам:

$$
\left.\begin{aligned}
y &= C_1(x)\,z_1 + C_2(x)\,z_2 + \ldots + C_n(x)\,z_n,\\
y' &= C_1(x)\,z_1' + C_2(x)\,z_2' + \ldots + C_n(x)\,z_n' + \\
&\qquad \underbrace{+\,C_1'(x)\,z_1 + C_2'(x)\,z_2 + \ldots + C_n'(x)\,z_n,}_{0}\\
y'' &= C_1(x)\,z_1'' + C_2(x)\,z_2'' + \ldots + C_n(x)\,z_n'' + \\
&\qquad \underbrace{+\,C_1'(x)\,z_1' + C_2'(x)\,z_2' + \ldots + C_n'(x)\,z_n',}_{0}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n-1)} &= C_1(x)\,z_1^{(n-1)} + C_2(x)\,z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)\,z_n^{(n-1)} + \\
&\qquad \underbrace{+\,C_1'(x)\,z_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-2)},}_{0}\\
y^{(n)} &= C_1(x)\,z_1^{(n)} + C_2(x)\,z_2^{(n)} + \ldots + C_n(x)\,z_n^{(n)} + \\
&\qquad +\,C_1'(x)\,z_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\}\qquad (14)
$$

Подставим эти значения $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ в уравнение (1). Для этого умножим равенства (14) соответственно на $p_n(x), p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \ldots, p_1(x), 1$, сложим почленно и приравняем правую часть полученного равенства правой части уравнения (1):

$$
C_1(x)\,L(z_1) + C_2(x)\,L(z_2) + \ldots + C_n(x)\,L(z_n) + \\
+ C_1'(x)\,z_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-1)} = f(x).
$$

Так как $L(z_1) = L(z_2) = \ldots = L(z_n) \equiv 0$, то последнее равенство перепишется так:

$$
C_1'(x)\,z_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-1)} = f(x).
$$

Таким образом, для определения $C_i(x)$ получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&C_1'(x)\,z_1 + C_2'(x)\,z_2 + \ldots + C_n'(x)\,z_n = 0,\\
&C_1'(x)\,z_1' + C_2'(x)\,z_2' + \ldots + C_n'(x)\,z_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'(x)\,z_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1'(x)\,z_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,z_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}\right\}\qquad (15)
$$

Система (15) есть алгебраическая линейная неоднородная система относительно $C_i'(x)$. Разрешая эту систему относительно $C_i'(x)$ (что возможно, ибо ее определитель, будучи равным $W(x)$, отличен от нуля во всем интервале (a, b), находим:

$$C_i'(x) = \frac{W_{ni}(x)\, f(x)}{W(x)}, \tag{16}$$

где $W_{ni}(x)$ — алгебраическое дополнение элементов n-й строки определителя $W(x)$. Все функции $\frac{W_{ni}(x)\, f(x)}{W(x)}$ непрерывны в интервале (a, b).

Из равенств (16) находим* :

$$C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx + C_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где C_i — произвольные постоянные, а x_0 — любая точка из интервала (a, b).

Подставляя найденные значения функций $C_i(x)$ в формулу (13), получим:

$$y = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx + \sum_{i=1}^{n} C_i z_i. \tag{17}$$

Полагая здесь $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, получим (частное) решение неоднородного линейного уравнения (1):

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx, \tag{18}$$

так что (17) можно записать в виде (7) и, следовательно, решение, определяемое формулой (17), есть **общее** решение уравнения (1) в области (8).

Заметим, что частное решение (18), как нетрудно убедиться, удовлетворяет **нулевым** начальным условиям:

$$y_1 = 0,\quad y_1' = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{19}$$

В частности, для неоднородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \tag{20}$$

имеем:

$$y = -z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{z_2 f(x)}{W(x)}\, dx + z_2 \int_{x_0}^{x} \frac{z_1 f(x)}{W(x)}\, dx + C_1 z_1 + C_2 z_2. \tag{17'}$$

При этом

$$y_1 = -z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{z_2 f(x)}{W(x)}\, dx + z_2 \int_{x_0}^{x} \frac{z_1 f(x)}{W(x)}\, dx \tag{18'}$$

---

* Вместо определенных интегралов с переменным верхним пределом можно брать неопределенные интегралы.

есть частное решение уравнения (20), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{19'}$$

Для уравнения

$$y'' + q(x)\, y = f(x) \quad [p(x) = 0] \tag{21}$$

формулы (17′) и (18′) принимают более простой вид:

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_2 f(x)\, dx + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_1 f(x)\, dx + C_1 z_1 + C_2 z_2; \tag{17''}$$

$$y_1 = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_2 f(x)\, dx + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_1 f(x)\, dx \tag{18''}$$

(почему?).

Таким образом, *для нахождения общего решения неоднородного уравнения* (1) *достаточно уметь построить фундаментальную систему решений соответствующего ему однородного уравнения* (5), *после чего общее решение уравнения* (1) *найдется в квадратурах.*

172. Метод Коши* . Формула (18) дает частное решение уравнения (1). Укажем еще один метод построения частного решения неоднородного уравнения (1) в случае, когда известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — заданная фундаментальная система решений однородного уравнения (5). Построим, пользуясь формулой (6), решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$z = 0, \ z' = 0, \ \ldots, \ z^{(n-2)} = 0, \ z^{(n-1)} = 1 \quad \text{при} \quad x = \alpha, \tag{22}$$

где $x = \alpha$ — любая заданная точка из интервала (a, b) [т. е. из интервала непрерывности коэффициентов и правой части уравнения (1)]. Это решение будет, очевидно, зависеть от α как от параметра. Обозначим его через $z = \varphi(x, \alpha)$. Здесь $\varphi(x, \alpha)$ есть функция от независимой переменной x и от параметра α, определенная и непрерывная в области $a < x < b$, $a < \alpha < b$, и имеет непрерывные частные производные по x до n-го порядка включительно. Так как функция $z = \varphi(x, \alpha)$, рассматриваемая как функция от x, является решением однородного уравнения $L(z) = 0$ при всяком α из интервала (a, b), то имеет место тождество

$$L[\varphi(x, \alpha)] \equiv 0 \quad (a < x < b, \quad a < \alpha < b). \tag{23}$$

* См.: Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, 1936, стр. 369.

Кроме того, в силу начальных условий (22), функция $\varphi(x, \alpha)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(\alpha, \alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha, \alpha) = 0, \; \ldots, \; \varphi^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0,$$
$$\varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = 1. \tag{24}$$

Здесь

$$\varphi^{(p)}(\alpha, \alpha) = \left[\frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p}\right]_{x=\alpha}. \tag{25}$$

В дальнейшем нам понадобится также следующая запись условий (24):

$$\varphi(x, x) = 0, \quad \varphi'(x, x) = 0, \; \ldots, \; \varphi^{(n-2)}(x, x) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(x, x) = 1 \tag{26}$$

где

$$\varphi^{(p)}(x, x) = \left[\frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p}\right]_{\alpha=x}. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha, \tag{28}$$

где x_0 — любое постоянное число, заключенное между числами a и b. Покажем, что функция (28) является частным решением неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными значениями искомой функции и всех ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно:

$$Y = 0, \quad Y' = 0, \; \ldots, \; Y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0. \tag{29}$$

Убедимся в этом непосредственной проверкой. Вычислим сначала производные $Y', \ldots, Y^{(n)}$. Используя формулу*

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha\right] = \int_{x_0}^{x} \psi'_x(x, \alpha)\, d\alpha + \psi(x, x) \tag{30}$$

---

* Эта формула есть частный случай общей формулы дифференцирования определенного интеграла по параметру в случае, когда и пределы интеграла зависят от параметра:

$$\frac{d}{dy}\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\right] = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\, dx + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y]$$

(см.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 146).

В нашем случае интеграл (28) зависит от параметра x, причем верхний предел тоже зависит от этого параметра, а нижний предел от параметра не зависит.

и принимая во внимание, что функция $\varphi(x, \alpha)$ удовлетворяет условиям (26), мы имеем последовательно:

$$\frac{dY}{dx} = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \varphi(x, x) f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha; \quad (28_1)$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \varphi'(x, x) f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha; \quad (28_2)$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \varphi^{(n-2)}(x, x) f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha; \quad (28_{n-1})$$

$$\frac{d^nY}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \varphi^{(n-1)}(x, x) f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + f(x). \quad (28_n)$$

Подставим теперь функцию Y и найденные значения ее производных в левую часть уравнения (1). Получим:

$$L(Y) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + f(x) +$$

$$+ p_1(x) \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \ldots +$$

$$+ p_{n-1}(x) \int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + p_n(x) \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha. \quad (31)$$

Включая множители $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ в подынтегральные функции и объединяя все полученные интегралы, будем иметь:

$$L(Y) = \int_{x_0}^{x} [\varphi^{(n)}(x, \alpha) + p_1(x) \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) + \ldots +$$

$$+ p_{n-1}(x) \varphi'(x, \alpha) + p_n(x) \varphi(x, \alpha)] f(\alpha)\, d\alpha + f(x) \quad (32)$$

или

$$L(Y) = \int_{x_0}^{x} L[\varphi(x, \alpha)] f(\alpha)\, d\alpha + f(x), \tag{33}$$

откуда, согласно (23), находим, что

$$L(Y) \equiv f(x) \quad (a < x < b), \tag{34}$$

а это и означает, что функция Y, определяемая формулой (28), есть частное решение неоднородного уравнения (1).

Из формул (28), (28_1), ..., (28_{n-1}) видно, что частное решение (28) удовлетворяет начальным условиям (29).

Формула (28) называется *формулой Коши для неоднородного уравнения** .

Используя частное решение неоднородного уравнения (1), доставляемое формулой Коши, мы можем записать общее решение этого уравнения в виде

$$y = z + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha, \tag{35}$$

где z — общее решение соответствующего однородного уравнения (5).

Так как для нахождения общего решения неоднородного уравнения достаточно уметь построить фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, то особый интерес представляют такие линейные дифференциальные уравнения, у которых фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения находится легко. К числу таких уравнений относятся прежде всего уравнения с постоянными коэффициентами.

---

* С частным случаем ее мы уже встречались в п. 95 [см. там формулу (9)].

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

173. Предварительные замечания. В этой главе мы будем изучать линейное уравнение n-го порядка:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа, а $f(x)$ — функция от x, непрерывная в интервале (a, b) (в частности, $f(x)$ может быть постоянной в этом интервале).

Среди линейных уравнений с постоянными коэффициентами наибольшее значение для приложений имеют уравнения второго порядка:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2}$$

где p и q — постоянные вещественные числа.

Интегрирование неоднородного уравнения (1), как показано в предыдущей главе, приводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения. Поэтому сначала мы изучим вопрос о построении общего решения однородного линейного уравнения

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{3}$$

В силу теоремы п. **166**, задача построения общего решения уравнения (3) будет решена, если мы найдем хоть одну фундаментальную систему решений. В следующих двух пунктах мы покажем, что фундаментальная система решений уравнения (3) может быть построена из элементарных функций.

174. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородного линейного уравнения в случае различных корней характеристического уравнения. Однородное линейное уравнение первого порядка*

$$y' + ay = 0,$$

где a — постоянное вещественное число, имеет частное решение вида

$$y_1 = e^{-ax}.$$

Следуя Э й л е р у, будем и для однородного линейного уравнения n-го порядка (3) искать частное решение в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{4}$$

где λ — некоторое, пока неопределенное, постоянное число (вещественное или комплексное).

Подставляя (4) в левую часть уравнения (3), т. е. вычисляя оператор $L(y)$ от функции $y=e^{\lambda x}$, получим:

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n)\, e^{\lambda x} = \\ = P(\lambda)\, e^{\lambda x}, \tag{5}$$

где

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{6}$$

Из (5) ясно, что функция $y=e^{\lambda x}$ является решением уравнения (3), т. е. $L(e^{\lambda x})=0$, тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения $P(\lambda)=0$ или

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{7}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* однородного линейного уравнения (3).

Легко видеть, что для составления характеристического уравнения достаточно заменить в уравнении (3) производную k-го порядка через k-ю степень λ, если при этом, как всегда, условиться считать, что производная нулевого порядка от функции есть сама функция, так что при составлении характеристического уравнения нужно заменять y на 1.

Предположим, что все корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ р а з л и ч н ы и в е щ е с т в е н н ы. Подставляя их поочередно в формулу (4), мы найдем n вещественных частных решений уравнения (3):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ \ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}. \tag{8}$$

Эти решения, как показано в примере 4 п. **160**, л и н е й н о

* См. п. **34**, пример.

независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$*, так что они составляют фундаментальную систему решений.

Поэтому, согласно теореме п. **166**, формула

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}, \tag{9}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, дает общее решение уравнения (3) в области

$$|x| < +\infty, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ \ldots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty. \tag{10}$$

Предположим теперь, что все корни характеристического уравнения по-прежнему различны, но среди них имеются комплексные.

Пусть $a+ib$ — комплексный корень характеристического уравнения. Тогда характеристическое уравнение имеет и сопряженный комплексный корень $a-ib$, ибо все его коэффициенты вещественны. Корню $a+ib$ соответствует в силу формулы (4) решение

$$y = e^{(a+ib)x}. \tag{11}$$

Это решение комплексное. Согласно доказанному в п. 159, вещественная и мнимая части решения (11), т. е. функции

$$e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx \tag{12}$$

также являются решениями уравнения (3). Эти решения, очевидно, линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Аналогично сопряженному корню $a-ib$ соответствуют также два вещественных линейно независимых частных решения:

$$e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx. \tag{13}$$

Но первое из них совпадает с первым из решений (12), а второе из этих решений и второе из решений (12), очевидно, линейно зависимы, так что сопряженный корень не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, *если все корни характеристического урав-*

---

* Это следует также из того, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ибо второй множитель есть определитель Вандермонда, а он не равен нулю, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны.

ния различные, но среди них имеются комплексные, то каждому вещественному корню λ_k *соответствует решение* $e^{\lambda_k x}$, *а каждой паре сопряженных комплексных корней* $a \pm ib$, *соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения вида* (12). В частности *каждой паре сопряженных чисто мнимых корней* $\pm ib$ *соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения*

$$\cos bx, \quad \sin bx. \tag{14}$$

Всего мы получим n вещественных решений вида:

$$e^{\lambda_k x}, \quad e^{ax}\cos bx, \quad e^{ax}\sin bx, \tag{15}$$

которые образуют фундаментальную систему решений, так как эти решения линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо в противном случае, используя формулы Эйлера, мы получили бы, что функции вида $e^{\lambda_\nu x}$, где λ_ν различны, линейно зависимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, что противоречит утверждению, доказанному в примере 4 п. **160.**

Пользуясь основной теоремой п. **166,** мы получаем общее решение уравнения (3) в области (10) в виде линейной комбинации всех частных решений (15) с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$. При этом *вещественному корню* λ_k *в общем решении соответствует выражение* $C_k e^{\lambda_k x}$ *а двум сопряженным комплексным корням* $a \pm ib$ *соответствует выражение вида*

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \tag{16}$$

В частности *двум сопряженным чисто мнимым корням* $\pm ib$ *соответствует выражение вида*

$$C_1 \cos bx + C_2 \sin bx. \tag{16'}$$

Пример 1. Дано уравнение

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0. \tag{17}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \tag{18}$$

имеет простые корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Поэтому функции

$$e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x} \tag{19}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \tag{20}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0. \tag{21}$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \tag{22}$$

тоже имеет простые корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, причем один из них равен нулю. Следовательно, функции

$$1, \quad e^x, \quad e^{2x} \tag{23}$$

составляют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} \tag{24}$$

есть общее решение.

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0. \tag{25}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0 \tag{26}$$

имеет один вещественный корень $\lambda_1 = -1$ и два сопряженных комплексных корня: $\lambda_2 = 2 + i3$, $\lambda_3 = 2 - i3$. Поэтому функции

$$e^{-x}, \quad e^{2x}\cos 3x, \quad e^{2x}\sin 3x \tag{27}$$

составляют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x). \tag{28}$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} + 4y = 0. \tag{29}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = 0, \tag{30}$$

имеем*:

$$\lambda = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

так что:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i,$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i,$$

$$\lambda_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i.$$

Следовательно, функции

$$\left.\begin{aligned} &e^x\cos x, \quad e^x \sin x, \\ &e^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\sin x) \tag{32}$$

есть общее решение уравнения (29).

Пример 5. Пусть дано уравнение

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0. \tag{33}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \tag{34}$$

имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и два сопряженных комплексных и притом чисто мнимых корня $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Поэтому в качестве фунда-

---

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1. М., Гостехиздат, 1956, стр. 357, формулы (16) и (17).

ментальной системы решений можно взять функции

$$e^x;\quad \cos 2x,\quad \sin 2x, \tag{35}$$

а

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x \tag{36}$$

будет общим решением.

175. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения. Пусть λ_1 есть k-кратный корень характеристического уравнения (вещественный или комплексный), так что

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ но } P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{37}$$

Чтобы найти решения, соответствующие характеристическому числу λ_1, поступим следующим образом.

Продифференцируем тождество*

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)\, e^{\lambda x} \tag{38}$$

m раз по λ, используя при дифференцировании левой части формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right) \quad (u = e^{\lambda x}),$$

т. е. выполняя дифференцирование по λ под знаком оператора, а при дифференцировании правой части формулу Лейбница для m-й производной от произведения двух функций

$$(uv)^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}\, u^{(\nu)} v^{(m-\nu)} \quad (C_m^0 = 1),$$

полагая $u(\lambda) = P(\lambda)$, $v(\lambda) = e^{\lambda x}$. Получим:

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} P^{(\nu)}(\lambda)\, x^{m-\nu} e^{\lambda x}. \tag{39}$$

Отсюда вследствие (37) имеем:

$$L(x^m e^{\lambda_1 x}) \equiv 0 \quad \text{при} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \tag{40}$$

т. е. функции

$$e^{\lambda_1 x},\ x e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \tag{41}$$

являются решениями уравнения (3).

Эти решения линейно независимы** в интервале $(-\infty, +\infty)$. Если при этом λ_1 есть вещественный корень, то решения (41) тоже вещественны.

Таким образом, *всякому вещественному корню λ_1 кратности k соответствует k вещественных линейно независимых решений вида* (41).

Если характеристическое уравнение имеет комплексный корень $a+ib$ кратности k, то оно имеет и сопряженный комплекс-

---

* См. формулу (5).

** См. п. **160**, пример 4.

сный корень $a-ib$ той же кратности. Согласно (41), корню $a+ib$ соответствует k решений:

$$e^{(a+ib)x}, \quad xe^{(a+ib)x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{(a+ib)x}. \tag{42}$$

Эти решения комплексные. Отделив в них вещественные и мнимые части, мы получим* $2k$ вещественных решений:

$$\left.\begin{array}{lll} e^{ax}\cos bx, & xe^{ax}\cos bx, \; \ldots, & x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, & xe^{ax}\sin bx, \; \ldots, & x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{array}\right\} \tag{43}$$

(Эти решения линейно независимы в интервале $-\infty, +\infty$), ибо в противном случае, используя формулы Эйлера, мы получили бы, что функции вида $x^m e^{\lambda_\nu x}$, где все λ_ν различные, линейно зависимы в этом интервале.

Нетрудно убедиться, что так же, как и в случае простого комплексного корня, сопряженный корень $a-ib$ не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, *каждой паре сопряженных комплексных корней* $a \mp ib$ *кратности* k *соответствует* $2k$ *вещественных линейно независимых решений вида* (43).

В общем случае, построив вещественные решения, соответствующие каждому простому вещественному корню, линейно независимые решения, соответствующие каждой паре простых сопряженных комплексных корней, линейно независимые решения, соответствующие каждому кратному вещественному корню и каждой паре кратных сопряженных комплексных корней, мы получим всего n вещественных решений.

Все эти решения линейно независимы в интервале $-\infty, +\infty$), ибо в противном случае мы получили бы, что функции вида $x^m e^{\lambda_\nu x}$, где все λ_ν различные, линейно зависимы в этом интервале.

Линейная комбинация найденных n линейно независимых решений с произвольными постоянными коэффициентами есть общее решение в области (10). *При этом вещественному корню* λ_1 *кратности* k *соответствует в общем решении слагаемое* $P_{k-1}(x)\, e^{\lambda_1 x}$, *а паре сопряженных комплексных корней* $a \pm ib$ *кратности* k *соответствует слагаемое* $e^{ax}(P_{k-1}(x)\cos bx + Q_{k-1}(x)\sin bx)$, *где* $P_{k-1}(x)$ *и* $Q_{k-1}(x)$ *— полиномы степени* $k-1$ *с произвольными коэффициентами.*

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \tag{44}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \tag{45}$$

имеет один трехкратный вещественный корень $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Поэтому

* См. п. 159.

уравнение (44) имеет три линейно независимых решения вида:

$$e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x, \tag{46}$$

а общим решением будет

$$y = e^x (C_1 + C_2x + C_3x^2). \tag{47}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0. \tag{48}$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \tag{49}$$

имеет один простой корень $\lambda_1=3$ и один двукратный корень $\lambda_2=\lambda_3=2$. Этим корням соответствуют решения

$$e^{3x}; \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}, \tag{50}$$

а

$$y = C_1e^{3x} + e^{2x} (C_2 + C_3x) \tag{51}$$

будет общим решением.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0. \tag{52}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \tag{53}$$

имеет один двукратный вещественный корень $\lambda_1=\lambda_2=2$ и два простых комплексных сопряженных корня $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$. Поэтому в качестве фундаментальной системы решений можно взять

$$e^{2x}, \quad xe^{2x}; \quad \cos x, \quad \sin x, \tag{54}$$

так что формула

$$y = e^{2x} (C_1 + C_2x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x \tag{55}$$

даст общее решение.

Пример 4. Пусть дано уравнение

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0. \tag{56}$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \tag{57}$$

имеет двукратный комплексный корень $\lambda_1=\lambda_2=1+i$ и двукратный сопряженный комплексный корень $\lambda_3=\lambda_4=1-i$. Следовательно, функции

$$\left.\begin{matrix} e^x \cos x, & xe^x \cos x, \\ e^x \sin x, & xe^x \sin x \end{matrix}\right\} \tag{58}$$

составляют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = e^x [(C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x]. \tag{59}$$

Пример 5. Рассмотрим следующее уравнение:

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0. \tag{60}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0 \tag{61}$$

имеет один простой корень $\lambda_1=1$ и два двукратных комплексных сопряженных корня $\lambda_2=\lambda_3=2i$, $\lambda_4=\lambda_5=-2i$. Поэтому функции

$$e^x; \quad \cos 2x, \quad x\cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x\sin 2x \tag{62}$$

образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\ \cos 2x + (C_4 + C_5x)\ \sin 2x \tag{63}$$

есть общее решение.

176. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим случай однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{64}$$

с постоянными вещественными коэффициентами p и q. В этом случае мы имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{65}$$

Если оно имеет различные вещественные корни λ_1 и λ_2, то функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{66}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (64), а его общим решением будет

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}. \tag{67}$$

Если корни характеристического уравнения (65) комплексные сопряженные $\lambda_{1,2}=a\pm ib$, то уравнение (64) имеет фундаментальную систему решений вида:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx \quad (a \neq 0) \tag{68}$$

или

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx, \tag{69}$$

а его общим решением соответственно будет

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx) \quad (a \neq 0) \tag{70}$$

или

$$y = C_1\cos bx + C_2\sin bx. \tag{71}$$

Наконец, если корни характеристического уравнения (65) кратные $\lambda_{1,\,2} = -\frac{p}{2}$, то уравнение (64) имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}. \tag{72}$$

Общим решением будет:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2x). \tag{73}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{74}$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1, \quad y' = 2 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{75}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{76}$$

имеет различные вещественные корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Поэтому функции

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x}. \tag{77}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \tag{78}$$

Для нахождения искомого частного решения подставим начальные данные в систему

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \\ y' &= 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 2 &= 2C_1 + 3C_2, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

откуда $C_2=0$, $C_1=1$, так что искомым частным решением будет

$$y = e^{2x}. \tag{81}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' = 0. \tag{82}$$

Имеем:

$$\left.\begin{gathered} \lambda^2 - 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = e^{5x}; \\ y = C_1 + C_2 e^{5x}. \end{gathered}\right\} \tag{83}$$

Пример 3. Для уравнения

$$y'' + y' + y = 0 \tag{84}$$

будем иметь:

$$\left.\begin{gathered} \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,\,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \; y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x; \\ y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{gathered}\right\} \tag{85}$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (k \neq 0) \tag{86}$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{87}$$

Здесь имеем:

$$\left.\begin{gathered} \lambda^2 + k^2 = 0, \quad \lambda_{1,\,2} = \pm ik; \quad y_1 = \cos kx, \quad y_2 = \sin kx; \\ y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \end{gathered}\right\} \tag{88}$$

Подставляя начальные данные в систему:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx, \\ y' &= -kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx, \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1, \\ 0 &= kC_2, \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; следовательно,

$$y = \cos kx \tag{91}$$

есть искомое решение.

Пример 5. Для уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{92}$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_{1,\,2} = -2; \quad y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}; \\ y = e^{-2x}(C_1 + C_2x). \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

§ 2. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

177. Предварительные замечания. Рассмотрим теперь неоднородное линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{1}$$

где, как и в случае однородного уравнения, будем предполагать, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть постоянные вещественные числа. Относительно функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения (1), будем предполагать, что она непрерывна в некотором интервале (a, b).

В предыдущем параграфе мы для всякого однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами научились строить фундаментальную систему решений, а тогда общее решение уравнения (1) находится (методом Лагранжа) в квадратурах.

Для некоторых частных видов функции $f(x)$ удается найти частное решение уравнения (1) без квадратур. В таких случаях, складывая это частное решение с общим решением соответствующего однородного уравнения, мы получаем без квадратур и общее решение уравнения (1).

178. Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1°. Предположим, что в уравнении (1) правая часть $f(x)$ представляет собою произведение полинома на показательную функцию, т. е. мы имеем:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = \\ = P_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{2}$$

где

$$P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \quad (m \geqslant 0) \tag{3}$$

есть полином с вещественными или комплексными коэффициентами (он может быть и постоянным числом); а α — постоянное число вещественное или комплексное (в том числе и равное нулю). При построении частного решения уравнения (2) различают два случая.

I случай. *α не является корнем характеристического уравнения, т. е. $P(\alpha) \neq 0$. В этом случае частное решение y_1 уравнения (2) следует искать в виде*

$$y_1 = Q_m(x) e^{\alpha x}, \tag{4}$$

где

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m \tag{5}$$

есть полином m-й степени с неопределенными коэффициентами, так что частное решение (4) имеет ту же аналитическую структуру, что и правая часть самого уравнения (2).

Коэффициенты полинома $Q_m(x)$ определяются подстановкой (4) в (2) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства. Убедимся, что искомые коэффициенты найдутся и притом единственным образом, так что уравнение (2) имеет только одно частное решение вида (4).

Подставляя функцию (4) в уравнение (2), вследствие основных свойств оператора $L(y)$, получаем:

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L(Q_m e^{\alpha x}) = L[(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x}] = \\ &= q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \ldots + q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + q_m L(e^{\alpha x}) = \\ &= (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользуемся формулами*:

$$\left.\begin{aligned} L(e^{\alpha x}) &= P(\alpha) e^{\alpha x}, \\ L(x^s e^{\alpha x}) &= \sum_{\nu=0}^{s} C_s^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha) \cdot x^{s-\nu} e^{\alpha x}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} q_0 \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{m-\nu} e^{\alpha x} + q_1 \sum_{\nu=0}^{m-1} C_{m-1}^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{m-1-\nu} e^{\alpha x} + \\ + \ldots + q_{m-1} \sum_{\nu=0}^{1} C_1^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{1-\nu} e^{\alpha x} + q_m P(\alpha)\, e^{\alpha x} = \\ = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{gathered} \tag{8}$$

Сокращая на $e^{\alpha x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

---

* См. п. 175, формулы (38) и (39).

$$\left.\begin{aligned}
x^m: &\quad q_0 P(\alpha) = p_0,\\
x^{m-1}: &\quad q_0 C_m^1 P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = p_1,\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x^1: &\quad q_0 C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + \\
&\quad + q_{m-1} P(\alpha) = p_{m-1},\\
x^0: &\quad q_0 C_m^m P^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + \\
&\quad + q_{m-1} P'(\alpha) + q_m P(\alpha) = p_m.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Так как $P(\alpha) \neq 0$, то из равенств (9) последовательно определятся все коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}, q_m$, и притом единственным образом.

II случай. α *является k-кратным корнем $(k \geqslant 1)$ характеристического уравнения*, т. е.

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \qquad P^{(k)}(\alpha) \neq 0. \tag{10}$$

В этом случае частное решение y_1 в виде (9) не построить, ибо $P(\alpha) = 0$. Его следует искать по формуле

$$y_1 = x^k \cdot Q_m(x)\ e^{\alpha x}, \tag{11}$$

где $Q_m(x)$ имеет вид (5).

Коэффициенты полинома $Q_m(x)$ определяются так же, как и в первом случае. Подставляя (11) в (2), получаем:

$$L(y_1) = L(x^k Q_m(x)\ e^{\alpha x}) = L\left(\sum_{s=0}^{m} q_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s L(x^{k+m-s} e^{\alpha x}) = \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{\nu=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha) \times$$

$$\times x^{k+m-s-\nu}\ e^{\alpha x}{}^{*} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s} e^{\alpha x} \tag{12}$$

или

$$\sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{\nu=0}^{m-s} C_{k+m-s}^{k+\nu} P^{(k+\nu)}(\alpha)\ x^{m-s-\nu} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s}{}^{*}. \tag{13}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
x^m: &\quad q_0 C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_0,\\
x^{m-1}: &\quad q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_1,\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x^1: &\quad q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots + \\
&\quad + q_{m-1} C_{k+1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_{m-1},\\
x^0: &\quad q_0 C_{k+m}^{k+m} P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} P^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + \\
&\quad + q_{m-1} C_{k+1}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_m C_k^k P^{(k)}(\alpha) = p_m.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

* Здесь использована формула (39) п. **175**, причем, в силу (10), суммирование по ν начинается с $\nu = k$.

Из этих равенств последовательно определятся все искомые коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}, q_m$, так как $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

2°. Предположим, что правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{ax} [P_m^{(1)}(x) \cos bx + P_m^{(2)}(x) \sin bx], \tag{15}$$

где $P_m^{(1)}(x)$ и $P_m^{(2)}(x)$ — заданные полиномы от x степени, равной или меньшей m, причем хоть один из них имеет степень m. Они могут быть и постоянными числами. Один из них может быть и тождественно равен нулю.

Заменяя $\cos bx$ и $\sin bx$ по формулам Эйлера:

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \qquad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}, \tag{16}$$

мы можем переписать равенство (15) так:

$$f(x) = P_m^{(1)}(x)\, e^{ax}\, \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + P_m^{(2)}(x)\, e^{ax}\, \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} =$$

$$= \widetilde{P}_m^{(1)}(x)\, e^{(a+ib)x} + \widetilde{P}_m^{(2)}(x)\, e^{(a-ib)x}, \tag{17}$$

где $\widetilde{P}_m^{(1)}(x)$ и $\widetilde{P}_m^{(2)}(x)$ — полиномы степени m (почему?), т. е. $f(x)$ представляет собою сумму двух слагаемых рассмотренного в 1° вида. Поэтому, используя замечание 1, сделанное в п. **170**, видим, что имеют место два случая.

I случай. Если a и b таковы, что число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде:

$$y_1 = \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{(a+ib)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)\, e^{(a-ib)x}, \tag{18}$$

где $\widetilde{Q}_m^{(1)}(x)$ и $\widetilde{Q}_m^{(2)}(x)$ — полиномы m-й степени с неопределенными коэффициентами.

II случай. Если $a+ib$ является k-кратным корнем ($k \geqslant 1$) характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде:

$$y_1 = x^k [\widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{(a+ib)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)\, e^{(a-ib)x}]. \tag{19}$$

Приводя (18) и (19) к вещественному виду, получаем в окончательном итоге следующее правило нахождения частного решения, когда правая часть уравнения (1) имеет вид (15).

I случай. *Если $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде:*

$$y_1 = e^{ax} [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx], \tag{20}$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ — полиномы m-й степени с неопределенными коэффициентами.

II случай. *Если $a+ib$ является k-кратным корнем $(k \geqslant 1)$ характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде:*

$$y_1 = x^k e^{ax} [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx], \tag{21}$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ — полиномы m-й степени с неопределенными коэффициентами.

В обоих случаях коэффициенты полиномов $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ определяются непосредственной подстановкой y_1 в уравнение (1).

Обращаем особое внимание читателя на то, что частное решение следует искать в виде (20) или (21), также и в том случае, когда $P_m^{(1)}(x) \equiv 0$ или $P_m^{(2)}(x) \equiv 0$.

179. Неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{22}$$

где p и q — постоянные вещественные числа, а $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Это уравнение при помощи метода Лагранжа всегда интегрируется в квадратурах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение:

$$y'' + k^2 y = f(x) \qquad (k \neq 0). \tag{23}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z'' + k^2 z = 0$$

имеет линейно независимые частные решения

$$z_1 = \cos kx, \quad z_2 = \sin kx.$$

Поэтому, применяя метод Лагранжа, получим общее решение уравнения (23) в виде *:

$$y = -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^{x} f(u) \sin ku \, du + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^{x} f(u) \cos ku \, du + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{24}$$

Вводя множители $\cos kx$ и $\sin kx$ под знаки определенных интегралов, объединяя полученные интегралы и используя формулу синуса разности двух углов, мы можем переписать (24) так:

$$y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} f(u) \sin k(x-u) \, du + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{25}$$

Частное решение

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} f(u) \sin k(x-u) \, du \tag{26}$$

* См. п. 171, формула (17″).

удовлетворяет **нулевым** начальным условиям

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \tag{27}$$

(почему?).

Если правая часть уравнения (22) является (одной из рассмотренных в предыдущем пункте) комбинацией полиномов, показательных и тригонометрических функций или же представляет собою сумму функций такого вида, то, найдя частное решение этого уравнения методом неопределенных коэффициентов и прибавив к нему общее решение соответствующего однородного уравнения, получим общее решение уравнения (22) в элементарных функциях.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2. \tag{28}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 5z' + 6z = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3; \quad z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Так как число α равно нулю и не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (28) ищем в виде:

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C. \tag{29}$$

Подставим y_1 в уравнение (28). Для этого умножим равенство (29) и равенства, полученные из него дифференцированием два раза по x на соответствующие коэффициенты уравнения (28) и приравняем сумму правых частей полученных равенств правой части уравнения (28). Будем иметь:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y_1 = Ax^2 + Bx + C \\ (-5) & y_1' = 2Ax + B \\ 1 & y_1'' = 2A \end{array}$$

$$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$6A = 6, \quad 6B - 10A = -10, \quad 6C - 5B + 2A = 2,$$

откуда $A=1$, $B=0$, $C=0$. Следовательно, $y_1=x^2$ и общим решением уравнения (28) будет

$$y = x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}. \tag{30}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x \ (\alpha = 0). \tag{31}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 5z' = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5; \quad z = C_1 + C_2e^{5x}.$$

Так как число 0 является **простым** корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (31) следует искать в виде

$$y_1 = x\,(Ax^2 + Bx + C). \tag{32}$$

Далее, так же как и в примере 1, находим:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad y_1 = \frac{1}{3}\,x^3.$$

Следовательно, общим решением (31) будет:

$$y = \frac{1}{3}\,x^3 + C_1 + C_2 e^{5x}. \tag{33}$$

Пример 3. Для уравнения

$$y'' - y = 6e^{2x} \quad (\alpha = 2) \tag{34}$$

имеем:

$$z'' - z = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то

$$\begin{array}{r|l}
(-1) & y_1 = Ae^{2x} \\
0 & y_1' = 2Ae^{2x} \\
1 & y_1'' = 4Ae^{2x} \\
\hline
 & \qquad 3Ae^{2x} = 6e^{2x},
\end{array}$$

$$A = 2, \quad y_1 = 2e^{2x};$$

$$y = 2e^{2x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}. \tag{35}$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = 2e^{x} \quad (\alpha = 1). \tag{36}$$

Здесь опять

$$z'' - z = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Но число 1 является *простым* корнем характеристического уравнения. Поэтому:

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = Axe^{x}, \quad A = 1, \quad y_1 = xe^{x}; \\ y = xe^{x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Пример 5. Для уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} \quad (\alpha = 2) \tag{38}$$

имеем:

$$z'' - 4z' + 4z = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_{1,\,2} = 2, \quad z = e^{2x}\,(C_1 + C_2 x).$$

Число 2 является *двукратным* корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = Ax^2 e^{2x}, \quad A = 1, \quad y_1 = x^2 e^{2x}; \\ y = x^2 e^{2x} + e^{2x}\,(C_1 + C_2 x). \end{array}\right\} \tag{39}$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^{x} + 5x^2. \tag{40}$$

Имеем.

$$z'' - 6z' + 5z = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5,$$

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{5x}.$$

Правая часть уравнения (40) состоит из двух слагаемых. Поэтому, в силу замечания 1 п. 170, для построения частного решения уравнения (40) достаточно построить частные решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} y'' - 6y' + 5y &= -3e^x, \\ y'' - 6y' + 5y &= 5x^2 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и взять их сумму. Для первого из уравнений (41) имеем:

$$y_1 = Axe^x, \quad A = \frac{3}{4}, \quad y_1 = \frac{3}{4}\, xe^x. \tag{42}$$

Для второго из уравнений (41) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &y_2 = Ax^2 + Bx + C, \quad A = 1, \quad B = \frac{12}{5}, \quad C = \frac{62}{25}, \\ &y_2 = x^2 + \frac{12}{5}\, x + \frac{62}{25}. \end{aligned}\right| \tag{43}$$

Поэтому

$$y_1 + y_2 = \frac{3}{4}\, xe^x + x^2 + \frac{12}{5}\, x + \frac{62}{25} \tag{44}$$

будет частным решением уравнения (40), а общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = \frac{3}{4}\, xe^x + x^2 + \frac{12}{5}\, x + \frac{62}{25} + C_1 e^x + C_2 e^{5x}. \tag{45}$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = e^x (\cos x - 7 \sin x) \quad (a=1, \ b=1). \tag{46}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' + z' - 2z = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad z = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Составляя число $a+ib$, имеем $a+ib = 1+i$. Так как это число не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (46) ищем в виде:

$$y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x). \tag{47}$$

Подставляя (47) в уравнение (46), будем иметь:

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x) \\ 1 & y_1' = e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x] \\ 1 & y_1'' = e^x (2B \cos x - 2A \sin x) \\ \hline & \end{array}$$

$$e^x [(-A + 3B) \cos x - (B + 3A) \sin x] = \\ = e^x (\cos x - 7 \sin x).$$

Сокращая на e^x и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему:

$$-A+3B=1, \quad -B-3A=-7,$$

откуда $A=2$, $B=1$. Следовательно,

$$y_1=e^x(2\cos x+\sin x) \tag{48}$$

и общим решением уравнения (46) будет:

$$y=e^x(2\cos x+\sin x)+C_1e^x+C_2e^{-2x}. \tag{49}$$

Пример 8. Для уравнения

$$y''+y'+y=-13\sin 2x \; (a=0, \; b=0) \tag{50}$$

имеем:

$$z''+z'+z=0, \quad \lambda^2+\lambda+1=0, \quad \lambda_{1,\,2}=-\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right).$$

Число $a+ib=i2$ не является корнем характеристического уравнения. Несмотря на то, что правая часть уравнения (50) не содержит $\cos 2x$, частное решение ищем в виде, содержащем и член с $\cos 2x$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &y_1=A\cos 2x+B\sin 2x; \quad A=2, \quad B=3; \\ &y_1=2\cos 2x+3\sin 2x. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Общим решением будет:

$$y=2\cos 2x+3\sin 2x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right). \tag{52}$$

Пример 9. Рассмотрим уравнение

$$y''+y=2\sin x \quad (a+ib=i). \tag{53}$$

Имеем:

$$z''+z=0, \quad \lambda^2+1=0, \quad \lambda_{1,\,2}=\pm i, \quad z=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Здесь число i является **простым** корнем характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде, содержащем множитель x:

$$y_1=x\,(A\cos x+B\sin x); \quad A=-1, \quad B=0; \quad y_1=-x\cos x. \tag{54}$$

Поэтому

$$y=-x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x \tag{55}$$

будет общим решением уравнения (53).

Для интегрирования линейного уравнения с постоянными (а иногда и с переменными*) коэффициентами с большим успехом может быть использован *операторный метод*, представляющий собою применение операционного исчисления к нахождению решения задачи Коши для этого уравнения. С основами

* См. И. З. Штокало. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Киев, АН УССР, 1961.

операторного метода интегрирования линейных уравнений читатель может познакомиться по курсу математического анализа Г. П. Толстова* и учебным пособиям для заочников К. У. Шахно** и Н. М. Матвеева***. Для более глубокого изучения этого вопроса рекомендуем обратиться к известной книге А. И. Лурье**** и учебному пособию В. А. Диткина и А. П. Прудникова*****.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

180. Свободные колебания. Рассмотрим снова задачу, которой мы занимались в п. **142**, и дадим другое доказательство полученных там результатов, а также исследуем более общий случай.

Предположим, что материальная точка массы $m>0$ движется по оси Ox, находясь под действием силы $-bx$, притягивающей ее к началу координат, силы сопротивления среды $-a\frac{dx}{dt}$ и внешней силы, направленной по оси Ox и равной $f(t)$ в момент времени t. Тогда, применяя закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}-bx+F(t). \tag{1}$$

Перепишем его в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t), \tag{2}$$

где

$$h=\frac{a}{2m}\geqslant 0,\quad k^2=\frac{b}{m}>0,\quad f(t)=\frac{F(t)}{m}. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала *уравнение свободных колебаний:*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \tag{4}$$

Соответствующим характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2+2h\lambda+k^2=0. \tag{5}$$

---

* Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1957, стр. 222—224, 267—269.

** К. У. Шахно. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Л., Изд-во СЗПИ, 1961, стр. 302—318.

*** Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Л., Изд. ЛГУ, 1965, стр. 259—265.

**** Л. И. Лурье. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, М., 1951.

***** В. А. Диткин и А. П. Прудников. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.

Здесь $h \geqslant 0$. Предположим сначала, что $h=0$, т. е. рассмотрим колебания в среде без сопротивления. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0. \tag{6}$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2+k^2=0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,\,2} = \pm ik$, так что общим решением уравнения (6) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{7}$$

Введем вместо C_1 и C_2 новые произвольные постоянные A и φ по формулам:

$$C_1 = A \sin\varphi, \quad C_2 = A\cos\varphi. \tag{8}$$

Тогда (7) преобразуется к виду:

$$x = A \sin(kt+\varphi). \tag{9}$$

Такое движение называется *чисто гармоническим колебанием с периодом* $T = \frac{2\pi}{k}$, *частотой* k, *амплитудой* A *и начальной фазой* φ*.

Амплитуда и начальная фаза определяются из начальных условий:

$$x\,\Big|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = x_0'. \tag{10}$$

Подставляя эти начальные условия в формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(kt+\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= Ak\cos(kt+\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\sin\varphi, \\ x' &= Ak\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

откуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{x_0'}. \tag{13}$$

Из формулы (9) мы видим, что в рассматриваемом случае всякое движение (движение с любыми начальными данными) ограничено при всех значениях t.

---

* *Фазой* гармонического колебания вообще называется аргумент функции sin. В нашем случае фазой является $kt+\varphi$, а *начальной фазой* (т. е. значением фазы при $t=0$) является φ.

Рассмотрим систему [142, (78)]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -k^2 x, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

соответствующую уравнению (6) на фазовой плоскости (x, x_1).

Здесь, как уже показано в п. 142 (см. там случай $h=0$), начало координат $x=0$, $x_1=0$ является точкой равновесия типа центр. Общее решение системы (14) дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin(kt + \varphi), \\ x_1 &= Ak \cos(kt + \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Отсюда видно, что для системы (14) начало координат является точкой равновесия типа центр, а невозмущенное движение $x \equiv 0$, $x_1 \equiv 0$ неасимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что $h>0$, т. е. колебание происходит в среде с сопротивлением.

Характеристическое уравнение (5) имеет корни:

$$\lambda_{1,\,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \tag{16}$$

Здесь возможны три случая.

Случай 1. $h^2 - k^2 > 0$. В этом случае оба корня характеристического уравнения вещественны и отрицательны. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - k^2})\, t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - k^2})\, t}. \tag{17}$$

Соответствующие движения называются *апериодическими движениями.*

Из формулы (17) следует, что *всякое решение уравнения* (4) *стремится к нулевому решению* $x = 0$ *при* $t \to +\infty$.

Для соответствующей системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -k^2 x - 2hx_1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

начало координат $x=0$, $x_1=0$ будет точкой равновесия типа узел. Из формулы общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - k^2})\, t} + C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - k^2})\, t}, \\ x_1 &= -(h - \sqrt{h^2 - k^2})\, C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - k^2})\, t} - \\ &\quad - (h + \sqrt{h^2 - k^2})\, C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - k^2})\, t} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

следует, что нулевое решение $x \equiv 0$, $x_1 \equiv 0$ системы (18) асимптотически устойчиво.

Случай 2. $h^2 = k^2$. Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = -h < 0$. Общим решением уравнения (4) будет

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{20}$$

Соответствующие ему движения также называются *апериодическими* (специальный случай апериодических движений). *Всякое решение уравнения* (4) *стремится к нулевому решению* $x \equiv 0$ *при* $t \to +\infty$.

Для системы (18) начало координат будет точкой равновесия типа узел. Из формулы общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-ht}(C_1 + C_2 t), \\ x_1 &= e^{-ht}[-h(C_1 + C_2 t) + C_2] \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

следует, что нулевое решение системы (18) **асимптотически устойчиво**.

Случай 3. $h^2 - k^2 < 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни, причем их вещественная часть отрицательна. Поэтому общее решение имеет вид:

$$x = e^{-ht}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{k^2 - h^2}\ t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\ t\right)\right] \tag{22}$$

или

$$x = Ae^{-ht} \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\ t + \varphi\right), \tag{23}$$

где A и φ связаны с C_1 и C_2 формулами (8).

Такое движение называется *затухающим гармоническим колебанием с периодом* $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}$ *и частотой* $\omega = \sqrt{k^2 - h^2}$, *амплитудой* Ae^{-ht} *и начальной фазой* φ. В отличие от чисто гармонического колебания здесь амплитуда Ae^{-ht} уже не постоянна. Число A называется *начальной амплитудой** , а h — *коэффициентом затухания*. Множитель e^{-ht} характеризует быстроту затухания. Начальная амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий (10).

Из формулы (23) видно, что *всякое решение уравнения* (4) *стремится к нулевому решению* $x \equiv 0$ *при* $t \to +\infty$.

Для системы (18) начало координат будет точкой равновесия типа фокус. Из формулы общего решения

$$\left.\begin{aligned} x &= Ae^{-ht} \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi\right), \\ x_1 &= Ae^{-ht}\left[-h \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{k^2 - h^2} \cos\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

следует, что нулевое решение системы (18) **асимптотически устойчиво**.

---

* Так как $Ae^{-ht}\big|_{t=0} = A$.

В заключение исследования свободных колебаний заметим, что *во всех рассмотренных случаях нулевое решение системы* (18) *устойчиво, причем для колебаний в среде с сопротивлением оно даже асимптотически устойчиво*. С точки зрения качественной теории отметим, что мы не встретились со случаем, когда начало координат является точкой равновесия типа седло.

181. Вынужденные колебания. Рассмотрим теперь уравнение вынужденных колебаний (2),

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t)\quad [f(t)\neq 0].$$

Здесь так же, как и в теории свободных колебаний, следует различать случаи колебания в среде без сопротивления ($h=0$) и в среде с сопротивлением ($h>0$).

Уравнение вынужденных колебаний в среде без сопротивления имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=f(t). \tag{25}$$

Здесь *собственные колебания*, определяемые соответствующим однородным уравнением, есть чисто гармонические колебания. Применяя метод вариации произвольных постоянных, мы найдем общее решение уравнения (25) в виде*:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du \tag{26}$$

или

$$x=A\sin(kt+\varphi)+\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du. \tag{27}$$

Здесь второе слагаемое представляет собою частное решение

$$x_1=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du=x_1(t), \tag{28}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x_1(t)\big|_{t=0}=0,\quad x_1'(t)\big|_{t=0}=0^{**}. \tag{29}$$

Движение, соответствующее частному решению (28), называется *чисто вынужденным колебанием*.

Таким образом, *колебание, определяемое уравнением* (25), *складывается из собственных колебаний точки под влиянием*

---

* См. п. 179, формула (25).

** См. п. 179, формула (27).

внутренней силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия, и чисто вынужденных колебаний, вызванных воздействием внешней силы.

В приложениях внешняя сила часто бывает синусоидальной величиной. В этом случае частное решение уравнения вынужденных колебаний может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Сложив его с общим решением соответствующего уравнения свободных колебаний, мы и получим общее решение уравнения вынужденных колебаний.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = M\sin\omega t \quad (a + ib = i\omega). \tag{30}$$

Сравнивая число $i\omega$ с корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + k^2 = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm ik$, видим, что при нахождении частного решения следует различать два случая: 1) $\omega \neq k$, 2) $\omega = k$.

В случае $\omega \neq k$, число $i\omega$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому, обозначая частное решение уравнения (30) через $x_1(t)$, имеем:

$$\begin{array}{r|l}
k^2 & x_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\
0 & x_1'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \\
1 & x_1''(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \\
\hline
 & A(k^2-\omega^2)\cos\omega t + B(k^2-\omega^2)\sin\omega t = M\sin\omega t;
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(k^2-\omega^2) = 0, \\ B(k^2-\omega^2) = M; \end{array}\right\} \quad A = 0, \quad B = \frac{M}{k^2-\omega^2};$$

$$x_1(t) = \frac{M}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{31}$$

Общим решением уравнения (30) будет

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{M}{k^2-\omega^2}\sin\omega t \tag{32}$$

или

$$x = A\sin(kt + \varphi) + \frac{M}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{33}$$

В случае $\omega = k$ число $i\omega$ является **простым** корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\begin{array}{r|l}
k^2 & x_1(t) = t(A\cos kt + B\sin kt) \\
0 & x_1'(t) = A\cos kt + B\sin kt + t(-Ak\sin kt + Bk\cos kt) \\
1 & x_1''(t) = 2(-Ak\sin kt + Bk\cos kt) + t(-Ak^2\cos kt - Bk^2\sin kt) \\
\hline
 & -2Ak\sin kt + 2Bk\cos kt = M\sin kt;
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2Ak = M, \\ 2Bk = 0; \end{array}\right\} \quad A = -\frac{M}{2k}, \quad B = 0;$$

$$x_1(t) = -\frac{M}{2k}t\cos kt. \tag{34}$$

Общим решением будет

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt - \frac{M}{2k}t\cos kt \tag{35}$$

или

$$x = A\sin(kt + \varphi) - \frac{M}{2k}t\cos kt. \qquad (36)$$

Второй член этой формулы представляет собою произведение степени t на периодическую функцию. В астрономии такой член называется *вековым членом.*

Формула (36) показывает, что в случае $\omega = k$* мы имеем колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Это явление называется в физике *резонансом* между собственными колебаниями рассматриваемой материальной точки и внешней силой.

Уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t) \quad (h > 0) \qquad (37)$$

также может быть проинтегрировано методом вариации произвольных постоянных.

В случае синусоидальной внешней силы частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов** .

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

182. **Приведение однородного линейного уравнения n-го порядка к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной.** Так как однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами всегда интегрируется в элементарных функциях коль скоро найдены все корни характеристического уравнения, то естественно поставить вопрос о возможности приведения линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной или искомой функции.

Пусть дано линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим сначала вопрос о приведении этого уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной. Сделаем подстановку

$$t = \psi(x). \qquad (2)$$

---

* Т. е. когда частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний материальной точки.

** См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II. М., Гостехиздат, 1948, стр. 104—108.

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= y'_t t'_x = y'_t \psi'(x), \\ y''_{x^2} &= y''_{t^2}[\psi'(x)]^2 + y'_t \psi''(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)}_{x^n} &= y^{(n)}_{t^n}[\psi'(x)]^n + \dots + y'_t \psi^{(n)}(x), \end{aligned}\right\}$$

так что уравнение (1) преобразуется в такое:

$$y^{(n)}_{t^n}[\psi'(x)]^n + \dots + p_n(x)\, y = 0.$$

Деля на $[\psi'(x)]^n$, получаем:

$$y^{(n)}_{t^n} + \dots + \frac{p_n(x)}{[\psi'(x)]^n} y = 0. \tag{3}$$

Отсюда ясно, что функцию $\psi(x)$ необходимо выбрать так, чтобы коэффициент при y в уравнении (3) был постоянным. Положим

$$\frac{p_n(x)}{[\psi'(x)]^n} = \frac{1}{c^n}.$$

Тогда

$$\psi'(x) = c\sqrt[n]{p_n(x)},$$

откуда

$$\psi(x) = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}\, dx,$$

Таким образом, *если уравнение* (1) *приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной, то только по формуле вида**:

$$t = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}\, dx. \tag{4}$$

Всегда можно непосредственно по коэффициентам уравнения (1) узнать, приводится оно при помощи замены независимой переменной, т. е. при помощи подстановки вида (4), к уравнению с постоянными коэффициентами или нет.

Ниже рассматриваются два замечательных уравнения, приводимые к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной.

183. Линейное уравнение Эйлера. Пусть дано *линейное уравнение Эйлера*:

$$D(y) \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{5}$$

где $a_1, \dots, a_n$ — постоянные вещественные числа.

Разрешая это уравнение относительно $y^{(n)}$, мы видим, что

---

* См.: Н. П. Еругин. Приводимые системы. «Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова», т. XIII, 1946, стр. 92. Пейович (T. Peyovitch) раньше Еругина построил метод и получил условие приводимости уравнений второго и третьего порядков, исходя из других соображений (см. Bulletin de la societé mathematigue de France, **53**, 1925, 208—225).

точка $x=0$ является особой точкой. Однако ясно, что условия теоремы существования и единственности выполнены в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Построим общее решение уравнения Эйлера при положительных значениях x*.

Сравнивая уравнение Эйлера с уравнением (1), мы видим, что у нас $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$. Поэтому, согласно (4),

$$t = c\int \sqrt[n]{\frac{a}{x^n}}\, dx.$$

Беря $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ и опуская постоянную интегрирования, получаем подстановку

$$t = \ln x \text{ или } x = e^t. \tag{6}$$

Тогда:

$$\left.\begin{aligned}
&y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = y'_t e^{-t}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t},\\
&y''_{x^2} = (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t},\\
&y'''_{x^3} = (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t) e^{-3t},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{(n)}_{x^n} = [y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!\, y'_t]\, e^{-nt}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из (7) видим, что производная k-го порядка от y по x выражается в виде произведения e^{-kt} на однородную линейную функцию от $y'_t, y''_{t^2}, \dots, y^{(k)}_{t^k}$ с постоянными коэффициентами. Поэтому, подставляя (6) и (7) в (5) и замечая, что множители $x^k(=e^{kt})$ взаимно уничтожаются с множителями e^{-kt}, мы получим однородное линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Найдя общее решение этого уравнения и полагая в нем $t = \ln x$, мы получим общее решение уравнения Эйлера.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{8}$$

Полагая $x = e^t$, имеем: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)\, e^{-2t}$. Подставляя в (8), получаем:

$$e^{2t}(y''_{t^2} - y'_t)\, e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = 0 \tag{9}$$

или

$$y''_{t^2} - 3y'_t + 2y = 0. \tag{10}$$

Интегрируя это уравнение, имеем: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, так что

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

---

* Для построения общего решения при отрицательных значениях x достаточно заменить во всех выкладках x через $-x$.

Следовательно, общим решением данного уравнения (8) будет:

$$y = C_1 x + C_2 x^2. \tag{11}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' - xy' + y = 0. \tag{12}$$

Подстановка $x=e^t$ приводит это уравнение к виду:

$$y''_{t^2} - 2y'_t + y = 0.$$

Далее, имеем: $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda_1=\lambda_2=1$. Поэтому

$$y = e^t\,(C_1 + C_2 t)$$

или

$$y = x\,(C_1 + C_2 \ln x). \tag{13}$$

Пример 3. Возьмем уравнение

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0. \tag{14}$$

Полагая $x=e^t$, приходим к уравнению

$$y''_{t^2} - 4y'_t + 5y = 0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+5=0$ имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_1=2+i$, $\lambda_2=2-i$. Поэтому

$$y = e^{2t}\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

или

$$y = x^2\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x). \tag{15}$$

З а м е ч а н и е 1. Так как уравнение с постоянными коэффициентами, к которому приводится уравнение Эйлера, имеет частные решения вида $e^{\lambda t}$ и $t^m e^{\lambda t}$, то уравнение Эйлера имеет частные решения вида x^λ и $(\ln x)^m\ x^\lambda$.

Отсюда вытекает следующий непосредственный способ интегрирования уравнения Эйлера.

Ищем решение в виде:

$$y = x^\lambda. \tag{16}$$

Тогда:

$$y^{(k)} = \lambda\,(\lambda-1)\ldots[\lambda-(k-1)]\ x^{\lambda-k} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Подставляя функцию (16) в левую часть уравнения Эйлера, получаем:

$$D\,(x^\lambda) = P\,(\lambda)\ x^\lambda, \tag{18}$$

где

$$P\,(\lambda) = \lambda\,(\lambda-1)\ \ldots\ [\lambda-(n-1)] + a_1\lambda\,(\lambda-1)\ \ldots\ [\lambda-(n-2)] + \\ + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{19}$$

Из (18) ясно, что $y=x^\lambda$ является частным решением уравнения Эйлера, тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения $P(\lambda)=0$ или

$$\lambda\,(\lambda-1)\ \ldots\ [\lambda-(n-1)] + a_1\lambda\,(\lambda-1)\ \ldots\ [\lambda-(n-2)] + \ldots + \\ + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{20}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением,* а его корни — *характеристическими числами* уравнения Эйлера.

Предположим, что все корни характеристического уравнения различны. Тогда уравнение Эйлера имеет n частных решений вида (16):

$$y_1 = x^{\lambda_1},\ y_2 = x^{\lambda_2},\ \ldots,\ y_n = x^{\lambda_n}. \tag{21}$$

Эти решения линейно независимы в интервале $(0, +\infty)$*. Если при этом все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественны, то и решения (21) вещественны, так что общим решением уравнения Эйлера будет

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k x^{\lambda_k}. \tag{22}$$

Например, характеристическим уравнением для уравнения (8) будет

$$\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Отсюда: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, общее решение имеет вид (11).

Предположим теперь, что все корни характеристического уравнения по-прежнему различны, но среди них имеются комплексные. Тогда последние входят сопряженными парами. Найдем вещественные частные решения, соответствующие одной такой паре $a \pm ib$. Характеристическому числу $a+ib$ соответствует комплексное решение

$$x^{a+ib} = x^a[\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x)].$$

Поэтому функции

$$x^a\cos(b\ln x), \quad x^a\sin(b\ln x)$$

будут вещественными решениями. Они, очевидно, линейно независимы. Сопряженное характеристическое число $a - ib$ не порождает новых (т. е. линейно независимых с только что найденными) вещественных частных решений. В формуле общего решения паре характеристических чисел $a+ib$ соответствует выражение вида:

$$x^a[C_1\cos(b\ln x) + C_2\sin(b\ln x)].$$

Например, для уравнения (14) характеристическим уравнением будет

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 5 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Следовательно, общее решение имеет вид (15).

Пусть λ_1 есть k-кратный корень характеристического уравнения, т. е.

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0. \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{23}$$

---

* См. п. **160**, пример 5.

Дифференцируя тождество (18) m раз по λ, получаем:

$$D[x^{\lambda}(\ln x)^m] = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} P^{(\nu)}(\lambda)\ x^{\lambda}(\ln x)^{m-\nu}, \tag{24}$$

откуда ясно, что функции

$$x^{\lambda_1}(\ln x)^m \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1) \tag{25}$$

являются частными решениями уравнения Эйлера, так что *в случае кратных характеристических чисел наряду с решением вида x^{λ_1} уравнение Эйлера допускает и решения, содержащие* $\ln x$.

Решения (25) линейно независимы в интервале $(0, +\infty)$*. Если при этом λ_1 есть вещественный корень характеристического уравнения, то все решения (25) тоже вещественны и в формуле общего решения этому корню будет соответствовать выражение

$$x^{\lambda_1} P_{k-1}(\ln x), \tag{26}$$

где P_{k-1} — полином $(k-1)$-й степени с произвольными коэффициентами.

Например, для уравнения (12) характеристическим уравнением будет

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, общее решение имеет вид (13).

Нетрудно показать, что если $a+ib$ и $a-ib$ — комплексные характеристические числа кратности k, то в формуле общего решения им соответствует выражение

$$x^a [\cos(b\ln x)\ P_{k-1}(\ln x) + \sin(b\ln x)\ Q_{k-1}(\ln x)], \tag{27}$$

где P_{k-1} и Q_{k-1} — полиномы степени $k-1$ с произвольными коэффициентами.

Замечание 2. Так как для уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью вида $P_m(x)\ e^{\alpha x}$ можно найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, то то же самое имеет место для уравнения

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = P_m(\ln x)\ x^{\alpha}, \tag{28}$$

так что *всякое уравнение вида* (28) *интегрируется в элементарных функциях.*

Замечание 3. К уравнению Эйлера приводится уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \\ + a_{n-1}(ax+b)\ y' + a_n y = 0, \tag{29}$$

---

* См. п. 160, пример 5.

стоит только сделать подстановку $ax+b=\tau$. Полагая затем $\tau=e^t$ или сразу $ax+b=e^t$, придем к уравнению с постоянными коэффициентами.

184. Уравнение Чебышева. Рассмотрим *уравнение Чебышева*.

$$(1-x^2)\ y''-xy'+n^2y=0. \tag{30}$$

Точки $x=-1$ и $x=1$ являются **особыми точками** этого уравнения. В каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$ выполнены условия теоремы существования и единственности.

Построим общее решение уравнения (30) при значениях x в интервале $(-1, +1)$.

Формула (4) дает

$$t=c\int\sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\,dx. \tag{31}$$

Беря $c=-\frac{1}{n}$ и опуская постоянную интегрирования, получаем подстановку

$$t=\arccos x \quad \text{или} \quad x=\cos t. \tag{32}$$

В силу этой подстановки, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= y'_t\, t'_x = y'_t\,\frac{1}{x'_t}=-y'_t\,\frac{1}{\sin t}, \\ y''_{x^2} &= -\left(y''_{t^2}\,\frac{1}{\sin t}-y'_t\,\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)= \\ &= y''_{t^2}\,\frac{1}{\sin^2 t}-y'_t\,\frac{\cos t}{\sin^3 t}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Подставляя эти значения y'_x и y''_{x^2} в уравнение (30) и заменяя x через $\cos t$, получим:

$$y''_{t^2}+n^2y=0. \tag{34}$$

Так как это уравнение имеет общее решение

$$y=C_1\cos nt+C_2\sin nt, \tag{35}$$

то общим решением уравнения Чебышева будет

$$y=C_1\cos n\arccos x+C_2\sin n\arccos x. \tag{36}$$

Частное решение

$$y_1=\cos n\arccos x=T_n \tag{37}$$

при n — целом, большем 0, представляет собою полином n-й степени* и, следовательно, не имеет особенностей в особых точках уравнения (30). Этот полином называется *полиномом Чебышева***.

185. Приведение однородного линейного уравнения n-го порядка к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи линейной замены искомой функции. Рассматривая задачу о приведении однородного линейного уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами, мы показали выше, что она иногда может быть решена при помощи замены независимой переменной. В некоторых случаях для решения этой же задачи может быть использована однородная линейная замена искомой функции, которая, согласно п. **158**, так же как и любая замена независимой переменной, не нарушает ни линейности, ни однородности уравнения.

Иногда для этой цели с успехом используется подстановка

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx} z, \tag{38}$$

приводящая уравнение (1) к уравнению, не содержащему члена с производной $(n-1)$-го порядка [п. **58**, замечание 2]***.

---

* В самом деле, приравнивая вещественные части в известной формуле Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

получим:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots +$$

$$+ (-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\sin^{2k}\varphi + \ldots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi \ (n \text{ четное}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi \ (n \text{ нечетное}) \end{cases}$$

Полагая $\varphi = \arccos x$ и замечая, что $\sin\varphi$ входит в четных степенях, мы видим, что $\cos n \arccos x$ есть полином n-й степени от x.

** Полином Чебышева является частным случаем более общего полинома Якоби (см.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. М., Гостехиздат, 1956, стр. 385—386).

*** См., например, п. **186**.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШИМ ФОРМАМ

186. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной. Для изучения свойств решений однородного линейного уравнения второго порядка и для нахождения решений часто бывает полезно предварительное приведение его к некоторым специальным формам.

Покажем, что *уравнение*

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0 \tag{1}$$

всегда можно преобразовать к виду, не содержащему первой производной.

Положим для этого*

$$y = \alpha(x)\, z, \tag{2}$$

где z — новая искомая функция. Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\alpha''(x)\, z + 2\alpha'(x)\, z' + \alpha(x)\, z'' + p(x)\,[\alpha'(x)\, z + \alpha(x)\, z'] + \\ + q(x)\,\alpha(x)\, z = 0$$

или

$$z'' + \left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right] z' + \left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\,\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right] z = 0. \tag{3}$$

Выберем $\alpha(x)$ так, чтобы коэффициент при z' обратился в нуль:

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0. \tag{4}$$

В качестве $\alpha(x)$ можно взять

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}\, dx}. \tag{5}$$

---

* См. п. **158**, замечание 2.

Тогда

$$\alpha'(x) = -\frac{p(x)}{2} e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx}, \quad \alpha''(x) = \left[-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right] e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx},$$

так что уравнение (3) примет вид:

$$z'' + \left[-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p^2(x)}{2} + q(x)\right] z = 0. \tag{6}$$

Таким образом, *линейная замена искомой функции*

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z \tag{7}$$

приводит уравнение (1) *к виду*:

$$z'' + I(x) z = 0. \tag{8}$$

где

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x). \tag{9}$$

Функция $I(x)$ называется *инвариантом* уравнения (1).

Ясно, что если уравнение (8) интегрируется в квадратурах, то тем самым и уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Например, это будет иметь место, если $I(x) = c$ или $I(x) = \frac{c}{(x-a)^2}$, ибо в этих случаях уравнение (1) приведется соответственно к уравнению с постоянными коэффициентами или к линейному уравнению Эйлера.

Заметим еще, что для уравнения с постоянными коэффициентами инвариант представляет собою взятый с противоположным знаком дискриминант характеристического уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0. \tag{10}$$

Здесь $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$, так что

$$I(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}. \tag{11}$$

Отсюда ясно, что если $n = \pm\frac{1}{2}$, то подстановка

$$y = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} z = \frac{z}{\sqrt{x}} \tag{12}$$

приводит соответствующее уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{13}$$

к уравнению

$$z'' + z = 0. \tag{14}$$

Так как $z_1 = \sin x$, $z_2 = \cos x$ — суть линейно независимые частные решения этого уравнения, то уравнение (13) будет иметь линейно независимые частные решения вида:

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}. \tag{15}$$

Второе из этих решений имеет в особой точке $x=0$ ту особенность*, что оно стремится к ∞ при $x \to 0$.

Умножая решения (15) на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, получим так называемые *функции Бесселя* $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}^{**}. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{17}$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{x}\,y' + y = 0. \tag{18}$$

Так как $I(x) = 1$, то подстановка $y = \frac{1}{x}z$ приводит к уравнению $z'' + z = 0$, так что общим решением уравнения (18) будет

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} \quad (x \neq 0). \tag{19}$$

187. Приведение к самосопряженному виду. Однородное линейное уравнение второго порядка, в котором коэффициент при y' равен производной от коэффициента при y'', т. е. уравнение вида:

$$p(x)\,y'' + p'(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \text{ или } \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = 0, \tag{20}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции от x, называется *самосопряженным уравнением* второго порядка. Уравнения в самосопряженной форме встречаются, например, в теории краевых задач.

Покажем, что *всякое однородное линейное уравнение второго порядка*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{21}$$

коэффициенты которого непрерывны в интервале (a, b), причем $p_0(x) \neq 0$, всегда можно привести к самосопряженному виду.

---

* Здесь речь идет об особенностях решений (15) как функций вещественной переменной x.

** См. п. 192, формула (124).

В самом деле, умножим обе части уравнения (21) на некоторую функцию $\mu=\mu(x)$:

$$p_0(x)\,\mu(x)\,y''+p_1(x)\,\mu(x)\,y'+p_2(x)\,\mu(x)\,y=0. \tag{22}$$

Выберем $\mu(x)$ так, чтобы

$$p_1(x)\,\mu(x)=[p_0(x)\,\mu(x)]'. \tag{23}$$

Запишем это равенство в виде:

$$p_0(x)\,\mu'(x)+[p_0'(x)-p_1(x)]\,\mu(x)=0. \tag{24}$$

Интегрируя это однородное линейное уравнение первого порядка, находим:

$$\mu(x)=\frac{1}{p_0(x)}\,e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}{}^{*}. \tag{25}$$

Тогда уравнение (22) перепишется так:

$$e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}y''+\frac{p_1(x)}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\cdot y'+\frac{p_2(x)}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\cdot y=0. \tag{26}$$

Это — самосопряженное уравнение.

Обозначим

$$e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}=p(x),\quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}=q(x). \tag{27}$$

Тогда (26) примет вид:

$$p(x)\,y''+p'(x)\,y'+q(x)\,y=0 \tag{28}$$

или

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y']+q(x)\,y=0, \tag{29}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в (a, b) и $p(x)>0$, если $p_0(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b).

Пример 1. Рассмотрим *уравнение Лежандра*

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0. \tag{30}$$

Точки $x=-1$ и $x=+1$ являются особыми точками этого уравнения. Мы будем рассматривать уравнение Лежандра в интервале $(-1, +1)$. Ясно, что это уравнение является самосопряженным, причем $p(x)=1-x^2>0$ в интервале $(-1, +1)$.

Пример 2. Пусть дано уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)\,y=0. \tag{31}$$

Будем рассматривать его в интервале $(0, +\infty)$. Уравнение (31) не самосопряженное. Приведем его к самосопряженному виду.

---

* Произвольную постоянную интегрирования полагаем равной 1.

Имеем:

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}. \tag{32}$$

Поэтому *уравнение Бесселя в самосопряженной форме* запишется так:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0 \tag{33}$$

или

$$(xy')' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{34}$$

Здесь $p(x) = x > 0$ в рассматриваемом интервале $(0, +\infty)$.

§ 2. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

188. Построение общего решения однородного линейного уравнения второго порядка в случае, когда известно одно частное решение. Пусть дано уравнение

$$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{1}$$

и нам известно одно его ненулевое частное решение y_1. Тогда, согласно п. **169**, подстановка

$$y = y_1 \int u\, dx, \tag{2}$$

где u — новая неизвестная функция, приведет данное уравнение к однородному линейному уравнению первого порядка и, следовательно, уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Выведем формулу общего решения. Подставляя (2) в уравнение (1), имеем:

$$\begin{array}{r|l} q(x) & y = y_1 \int u\, dx \\ p(x) & y' = y_1' \int u\, dx + y_1 u \\ 1 & y'' = y_1'' \int u\, dx + 2y_1' u + y_1 u' \end{array}$$

$$L(y_1) \int u\, dx + [2y_1' + p(x) y_1] u + y_1 u' = 0. \tag{3}$$

Отсюда, так как $L(y_1) \equiv 0$, получаем:

$$y_1 u' + [2y_1' + p(x) y_1] u = 0 \tag{4}$$

или

$$u' + \left[\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right] u = 0. \tag{5}$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, найдем:

$$u = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x)\, dx}. \tag{6}$$

Полагая $C=1$ и подставляя полученное значение u в формулу (2), получим, что *второе частное решение уравнения* (1) *дается формулой*

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx. \tag{7}$$

Следовательно, искомое общее решение имеет вид:

$$y = y_1 \left[C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} dx \right]. \tag{8}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - [a^2(x) + a'(x)]\, y = 0. \tag{9}$$

Это уравнение имеет частное решение

$$y_1 = e^{\int a(x)\,dx}. \tag{10}$$

Поэтому

$$y_2 = e^{\int a(x)\,dx} \int e^{-2\int a(x)\,dx} dx. \tag{11}$$

Общим решением уравнения (9) будет

$$y = e^{\int a(x)\,dx} \left[C_1 + C_2 \int e^{-2\int a(x)\,dx} dx \right]. \tag{12}$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{13}$$

Так же как и для уравнения Лежандра общего вида*, точки $x=-1$ и $x=1$ являются о с о б ы м и т о ч к а м и данного уравнения.

Одно частное решение уравнения (13) можно угадать. Это будет $y_1=x$.

Так как $p(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, то

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{(1-x^2)\,x^2} = x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right). \tag{14}$$

Следовательно,

$$y = x\left[C_1 + C_2\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\right] \tag{15}$$

есть общее решение уравнения (13) в области

$$-1 < x < 1, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty. \tag{16}$$

Заметим, что *только одно из линейно независимых частных решений y_1 и y_2 остается конечным, когда x стремится к особой точке $x=-1$ или $x=1$.* Это — частное решение y_1.

Можно показать, что этим свойством обладает и уравнение Лежандра общего вида, приведенное в предыдущем пункте**.

---

* См. п. 187, пример 1.

** См.: Э. Г у р с а. Курс математического анализа, т. II, 1936, стр. 373—374.

З а м е ч а н и е. Формула (7) полезна не только в тех случаях, когда мы знаем частное решение в виде э л е м е н т а р н о й функции. Например, при изучении аналитической структуры линейно независимых частных решений однородного линейного уравнения второго порядка эта формула дает возможность по заданной аналитической структуре одного из них установить структуру другого * .

189. Связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати. Порядок уравнения

$$L(y) = y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \tag{17}$$

всегда можно понизить на единицу, если воспользоваться общим приемом понижения порядка уравнений однородных относительно искомой функции и ее производных, изложенным в п. **98**.

Введем новую неизвестную функцию z, положив

$$\frac{y'}{y} = z. \tag{18}$$

Тогда имеем:

$$\begin{array}{r|l} q(x) & y = y \\ p(x) & y' = yz \\ 1 & y'' = y(z^2 + z') \\ \hline \end{array}$$

$$y\,[z^2 + z' + p(x)z + q(x)] = 0. \tag{19}$$

Сокращая на y, получаем уравнение Риккати:

$$z' = -z^2 - p(x)z - q(x). \tag{20}$$

Таким образом, *подстановка* (18) *приводит любое однородное линейное уравнение второго порядка к уравнению Риккати.* В частности, уравнение вида:

$$y'' + q(x)\,y = 0 \tag{21}$$

приводится к к а н о н и ч е с к о м у уравнению Риккати

$$z' = -z^2 - q(x). \tag{22}$$

Обратно, *всякое уравнение Риккати*

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) \tag{23}$$

можно привести к однородному линейному уравнению второго порядка. Действительно, положив в этом уравнении

$$y = -\frac{1}{P(x)}z, \tag{24}$$

получим, согласно п. **46**, уравнение Риккати вида (20), которое подстановкой $\dfrac{u'}{u} = z$ приводится к уравнению типа (17).

---

* См. п. **191**, стр. 452.

Таким образом, *подстановка*

$$y = -\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{u'}{u} \tag{25}$$

приводит любое уравнение Риккати (23) *к однородному линейному уравнению второго порядка вида* (17).

Так как уравнение Риккати интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях, то то же самое мы должны сказать и относительно однородного линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Установленная связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати имеет важное значение в том отношении, что она дает возможность заменить изучение свойств решений одного из этих уравнений изучением свойств решений другого.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

190. Представление решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде степенных рядов. Пусть дано уравнение

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

в котором коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ являются голоморфными функциями в окрестности точки $x = x_0$, т. е.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \; q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{2}$$

причем ряды справа сходятся в области $|x - x_0| < \rho$.

Тогда, согласно теореме Коши, доказанной в п. 151, существует единственное решение, голоморфное, по крайней мере, в той же окрестности точки $x = x_0$ и принимающее в этой точке любые наперед заданные начальные значения y_0 и y_0' т. е. решение вида:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{3}$$

причем ряд справа заведомо сходится в области $|x - x_0| < \rho$, а y_0 и y_0' — произвольные наперед заданные числа.

В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда коэффициенты уравнения (1) являются либо полиномами, либо отношениями полиномов.

В первом случае мы получаем решение в виде степенного ряда, сходящегося при всех значениях x, во втором случае радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение не меньше расстояния от точки $x=x_0$ до ближайшей из точек, в которых знаменатели коэффициентов уравнения, рассматриваемые как функции комплексной переменной x, обращаются в нуль.

Коэффициенты c_k в формуле (3) определяются единственным образом, если заданы y_0 и y_0'. Их можно определить, например, подстановкой ряда (3) в уравнение (1) и приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях $x-x_0$ в левой части полученного равенства.

Обычно строят фундаментальную систему решений y_1, y_2, нормированную в точке $x=x_0$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \\ y_2 &= x-x_0+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

после чего общее решение получают по формуле

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{5}$$

191. Представление решений в окрестности особой точки в виде обобщенных степенных рядов* . Если $x=x_0$ есть особая точка уравнения

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \tag{6}$$

то, в общем случае, решение тоже не будет голоморфным ни в какой окрестности этой точки.

Например, уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \tag{7}$$

имеет особую точку $x=0$. Как показано в п. **186**, это уравнение имеет следующие линейно независимые частные решения:

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},\quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (x>0). \tag{8}$$

Ни одно из этих частных решений не голоморфно ни в какой окрестности особой точки $x=0$, т. е. не представимо в виде ряда по целым положительным степеням x. Но эти решения представимы в окрестности особой точки $x=0$ в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right), \\ y_2 &= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

* См. также: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II. М., Гостехиздат, 1948, стр. 139—141.

или

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right), \\ y_2 &= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right), \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

которые отличаются от обычных степенных рядов лишь множителями вида x. Такие ряды называются **обобщенными степенными рядами**.

Вообще *обобщенным степенным рядом* по степеням разности $x - x_0$, называется ряд вида:

$$(x - x_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad (11)$$

где показатель ρ есть некоторое постоянное число, а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \qquad (12)$$

есть сходящийся степенной ряд по степеням $x - x_0$, причем коэффициент c_0 отличен от нуля.

Поставим вопрос: какой вид должны иметь коэффициенты уравнения (6) в окрестности особой точки $x = x_0$, чтобы хоть одно из его частных решений было представимо в окрестности этой особой точки в виде обобщенного степенного ряда по степеням $x - x_0$, т. е. в виде:

$$y = (x - x_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \; (c_0 \neq 0). \qquad (13)$$

Ответ на этот вопрос дается в аналитической теории дифференциальных уравнений. В частности доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы уравнение* (6) *имело в окрестности особой точки* $x = x_0$ *хоть одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда* (13), *достаточно, чтобы это уравнение имело вид:*

$$y'' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0} y' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2} y = 0, \qquad (14)$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k \qquad (15)$$

суть сходящиеся степенные ряды, причем коэффициенты p_0, q_0 *и* q_1 *не равны нулю одновременно,* ибо в противном случае точка $x=x_0$ не особая и существуют два линейно независимых решения, голоморфных в окрестности точки $x=x_0$. *При этом, если ряды* (15), *входящие в коэффициенты уравнения* (14), *сходятся в области* $|x-x_0|<R$, *то и ряд* (12), *входящий в решение* (13), *сходится, по крайней мере, в той же области*

$$|x-x_0|<R.$$

Доказательство этой теоремы дается в аналитической теории дифференциальных уравнений *, где особая точка $x=x_0$ рассматриваемого вида называется *регулярной* особой точкой. Здесь мы ограничимся лишь указанием способа нахождения показателя ρ и коэффициентов c_k.

Для упрощения выкладок будем считать, что $x=0$. Тогда

$$p(x)=\frac{\sum\limits_{k=0} p_k x^k}{x}, \quad q(x)=\frac{\sum\limits_{k=0} q_k x^k}{x^2}, \tag{16}$$

и уравнение (14) примет вид

$$y''+\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x}y'+\frac{\sum\limits_{k=0} q_k x^k}{x^2}y=0 \tag{17}$$

или

$$x^2y''+x\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\cdot y'+\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\cdot y=0. \tag{18}$$

Будем искать решение уравнения (18) в виде

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \quad (c_0\neq 0), \tag{19}$$

ограничиваясь положительными значениями x.

Подставляя (19) в (18), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)c_k x^{\rho+k}+\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)c_k x^{\rho+k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}=0. \tag{20}$$

Сокращая на x^ρ и перемножая ряды, получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} p_{k-n}(\rho+n)c_n\right)x^k+$$

---

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 353—365.

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} q_{k-n} c_n\right)x^k = 0^*. \tag{21}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x:

$$x^0:\ [\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0]\ c_0 = 0, \tag{22}$$

$$x^k:\ [(\rho+k)\ (\rho+k-1)+p_0(\rho+k)+q_0]\ c_k +$$
$$+\sum_{n=0}^{k-1}[p_{k-n}(\rho+n)+q_{k-n}]\ c_n = 0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

Так как $c_0 \neq 0$, то коэффициент при c_0 в (22) должен равняться нулю:

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0 = 0. \tag{24}$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением* в особой точке $x=0$. Из него и определяются значения показателя ρ.

Коэффициенты определяющего уравнения p_0 и q_0 суть свободные члены числителей в разложениях $p(x)$ и $q(x)$. Заметим, что их можно найти и не выполняя фактически разложения $p(x)$ и $q(x)$ в обобщенные степенные ряды (16), а по формулам

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x), \tag{25}$$

в справедливости которых легко убедиться непосредственной проверкой. Аналогично могут быть найдены коэффициенты p_0 и q_0 определяющего уравнения (24) в любой особой точке $x=x_0$:

$$p_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\ p(x), \quad q_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\ q(x). \tag{26}$$

Заметим еще, что коэффициент при c_k в (23) получается из левой части определяющего уравнения заменой ρ на $\rho+k$.

Обозначим корни определяющего уравнения через ρ_1 и ρ_2. Рассмотрим сначала случай, когда ρ_1 и ρ_2 вещественны и различны. Будем считать, что $\rho_1>\rho_2$.

Покажем, что *всегда существует решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее «старшему» корню* ρ_1.

Действительно, подставляя в равенство (23) вместо ρ корень ρ_1, мы видим, что коэффициент при c_k

$$(\rho_1+k)\ (\rho_1+k-1)+p_0(\rho_1+k)+q_0 \tag{27}$$

отличен от нуля, ибо число ρ_1+k не является корнем харак-

---

* $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{k-n} b_n\right) x^k.$$

теристического уравнения (ведь второй корень ρ_2 меньше ρ_1, и потому $\rho_2 \neq \rho_1 + k$). Следовательно, из (23) мы можем определить последовательно все коэффициенты c_k. Получим $c_k = c_k^{(1)}$, причем $c_0^{(1)} \neq 0$ — произвольно, но отлично от нуля.

Подставляя в формулу (19) вместо ρ и c_k числа ρ_1 и $c_k^{(1)}$, имеем:

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0). \tag{28}$$

Можно доказать, что степенной ряд, входящий в правую часть, сходится по крайней мере в области $|x| < R$, и, следовательно, формула (28) дает искомое решение уравнения (18).

При решении вопроса о существовании второго частного решения в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего корню ρ_2, существенную роль играет разность корней определяющего уравнения, т. е. число $s = \rho_1 - \rho_2$.

Если $\rho_1 - \rho_2$ не является целым положительным числом, то существует решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y_2 = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k \quad (c_0^{(2)} \neq 0), \tag{29}$$

соответствующее второму корню ρ_2. В самом деле, разыскивая это решение, мы получим, что коэффициент при $c_k^{(2)}$,

$$(\rho_2 + k)\,(\rho_2 + k - 1) + p_0\,(\rho_2 + k) + q_0, \tag{30}$$

не равен нулю, ибо $\rho_2 + k$ не является корнем определяющего уравнения (почему?). Поэтому все $c_k^{(2)}$ определятся, причем $c_0^{(2)} \neq 0$ — произвольно.

Если $s = \rho_1 - \rho_2$ есть целое положительное число, то, в общем случае, существование решения вида (29) не гарантируется, ибо тогда коэффициент при $c_s^{(2)}$ будет равен нулю*

Если корни ρ_1 и ρ_2 различны, но комплексны $\rho_{1,\,2} = a \pm ib$, то существуют решения в виде обобщенных степенных рядов, соответствующих каждому из корней (почему?). При этом под множителем x^{a+ib} понимается** выражение

$$x^{a+ib} = x^a\,[\cos\,(b \ln x) + i \sin\,(b \ln x)]. \tag{31}$$

---

* Ибо $\rho_2 + s = \rho_1$ — корень определяющего уравнения.

** См. стр. 377, 4°.

Отделяя в комплексном решении

$$y = x^{a+ib} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0) \tag{32}$$

(где коэффициенты c_k — комплексные числа) вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых частных решения уравнения (18).

В случае кратных корней определяющего уравнения $\rho_1 = \rho_2$ существует только одно решение в виде обобщенного степенного ряда.

Установим аналитический вид второго частного решения в случае, когда s есть целое положительное число или нуль. Для этого воспользуемся формулой, выражающей y_2 через y_1 и $p(x)$*:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{33}$$

Заменим здесь y_1 его аналитическим представлением в виде обобщенного степенного ряда

$$y_1 = x^{\rho_1} P_1(x), \tag{34}$$

где $P_1(x)$ — ряд Тэйлора со свободным членом, не равным нулю. Вообще будем обозначать через $P_k(x)$ ряд Тэйлора, свободный член которого отличен от нуля.

Так как

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1}, \tag{35}$$

то

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\int \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1}\,dx} = e^{-p_0 \ln x} \cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k} =$$

$$= e^{\ln x^{-p_0}} \cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k} = x^{-p_0} P_2(x). \tag{36}$$

Поэтому

$$\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} = \frac{x^{-p_0} P_2(x)}{x^{2\rho_1} P_1^2(x)} = x^{-(p_0 + 2\rho_1)} P_3(x). \tag{37}$$

---

* См. п. 188 (7).

Выразим p_0 через корни определяющего уравнения (24). Имеем: $\rho_1 + \rho_2 = 1 - p_0$, откуда

$$p_0 = 1 - \rho_1 - \rho_2. \tag{38}$$

Следовательно,

$$p_0 + 2\rho_1 = 1 + \rho_1 - \rho_2 = 1 + s. \tag{39}$$

Подставляя в (37), получим:

$$\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} = x^{-(1+s)} P_3(x) = \frac{P_3(x)}{x^{1+s}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x^{1+s}} =$$

$$= \frac{a_0}{x^{1+s}} + \frac{a_1}{x^s} + \ldots + \frac{a_s}{x} + a_{s+1} + a_{s+2}x + \ldots \quad (a_0 \neq 0). \tag{40}$$

Здесь мы существенно используем предположение о том, что s — целое положительное, ибо в противном случае мы не получим члена $\frac{a_s}{x}$ (почему?).

Введя (для симметрии) обозначения

$$a_0 = \gamma_{-(1+s)}, \quad a_1 = \gamma_{-s}, \ \ldots, \ a_s = \gamma_{-1},$$
$$a_{s+1} = \gamma_0, \quad a_{s+1} = \gamma_1, \ \ldots, \tag{41}$$

перепишем (40) в виде

$$\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} = \frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}} + \frac{\gamma_{-s}}{x^s} + \ldots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots$$
$$(\gamma_{-(1+s)} \neq 0). \tag{42}$$

Подставляя (40) в формулу (33) и заменяя y_1 его значением из (34), получим для y_2 следующее выражение:

$$y_2 = x^{\rho_1} P_1(x) \int \left[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}} + \frac{\gamma_{-s}}{x^s} + \ldots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots \right] dx =$$
$$= x^{\rho_1} P_1(x) \left[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{-sx^s} + \frac{\gamma_{-s}}{(-s+1)\,x^{s-1}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \gamma_{-1} \ln x + \gamma_0 x + \frac{\gamma_1}{2} x^2 + \ldots \right]. \tag{43}$$

Выделим член, содержащий $\ln x$, а из оставшихся в квадратной скобке членов вынесем за скобку x^{-s}:

$$y_2 = \gamma_{-1} x^{\rho_1} P_1(x) \ln x + x^{\rho_1 - s} P_1(x) \times$$

$$\times\left[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{-s}+\frac{\gamma_{-s}}{-s+1}\,x+\ldots+\gamma_0\,x^{1+s}+\ldots\right]. \tag{44}$$

Так как $\rho_1 - s = \rho_2$, $\gamma_{-(1+s)} \neq 0$, то для y_2 получаем окончательно выражение вида:

$$y_2 = x^{\rho_2} P_4(x) + \gamma_{-1}\, y_1 \ln x. \tag{45}$$

Отсюда следует, что второе частное решение в рассматриваемом случае (s — целое неотрицательное) может, кроме обобщенного степенного ряда, содержать слагаемое, в которое входит $\ln x$. Это зависит от величины коэффициента γ_{-1}, который может оказаться отличным от нуля, причем если $s=0$, т. е. $\rho_1=\rho_2$, то коэффициент γ_{-1} заведомо отличен от нуля, ибо в этом случае не равный нулю коэффициент $\gamma_{-(1+s)}$ обращается в γ_{-1}, так что $\gamma_{-1}\neq 0$. Следовательно, *в случае кратных корней определяющего уравнения второе частное решение имеет вид:*

$$y_2 = x^{\rho_1} P_4(x) + \gamma_{-1}\, y_1 \ln x, \tag{46}$$

где $\gamma_{-1} \neq 0$.

Заметим, что, разыскивая решения в виде обобщенных степенных рядов или рядов (45) более общего вида, мы, так же как и при интегрировании степенными рядами, можем иногда получить решение в элементарных функциях, если степенные ряды, входящие в решения, обрываются или представляют собою ряды Тэйлора известных элементарных функций.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Эйлера

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0 \quad (x>0). \tag{47}$$

Точка $x=0$ является регулярной особой точкой, ибо уравнение (47) можно переписать в виде:

$$y'' + \frac{a_1}{x}\,y' + \frac{a_2}{x^2}\,y = 0. \tag{48}$$

Определяющим уравнением в этой особой точке будет

$$\rho(\rho-1) + a_1\rho + a_2 = 0 \tag{49}$$

(почему?). Предположим сначала, что его корни ρ_1 и ρ_2 вещественны и различны. Построим решение, соответствующее «старшему» корню ρ_1:

$$y_1 = x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{\rho_1+k} \quad (c_0\neq 0). \tag{50}$$

Подставляя (50) в (47) и сокращая на x^{ρ_1}, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho_1 + k)(\rho_1 + k - 1)\, x^k + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho_1 + k)\, x^k + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \quad (51)$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x:

$$\left.\begin{aligned} &x^0 \quad : c_0 \left[\rho_1 (\rho_1 - 1) + a_1 \rho_1 + a_2\right] = 0, \\ &x \quad : c_1 \left[(\rho_1 + 1)\, \rho_1 + a_1 (\rho_1 + 1) + a_2\right] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x^k \quad : c_k \left[(\rho_1 + k)(\rho_1 + k - 1) + a_1 (\rho_1 + k) + a_2\right] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Так как все квадратные скобки, начиная со второй, отличны от нуля (почему?), то

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = \ldots = 0. \quad (53)$$

Коэффициент c_0, как всегда, отличен от нуля и произволен. Полагая $c_0 = 1$, получаем искомое частное решение

$$y_1 = x^{\rho_1}. \quad (54)$$

Второе решение находим по формуле (33). Имеем:

$$y_2 = x^{\rho_1} \int \frac{e^{-a_1 \ln x}}{x^{2\rho_1}}\, dx = x^{\rho_1} \int \frac{x^{-a_1}}{x^{2\rho_1}}\, dx =$$

$$= x^{\rho_1} \int x^{-(a_1 + 2\rho_1)}\, dx = x^{\rho_1} \int x^{-(1+s)}\, dx =$$

$$= x^{\rho_1} \frac{x^{-s}}{-s} = -\frac{1}{s} x^{\rho_1 - s} = -\frac{1}{s} x^{\rho_2}. \quad (55)$$

В качестве второго частного решения можно взять

$$y_2 = x^{\rho_2} \quad (56)$$

независимо от того, будет s целым положительным числом или нет. Во всех случаях второе решение не содержит $\ln x$. Так как ρ_1 и ρ_2 вещественны, то решения (54), (56) вещественны. Комплексным корням $\rho_{1,2} = a \pm ib$ соответствует пара вещественных (линейно независимых) частных решений, которые получаются из комплексного решения

$$y = x^{a+ib} = x^a \left[\cos (b \ln x) + i \sin (b \ln x)\right] \quad (57)$$

отделением вещественной и мнимой частей:

$$y_1 = x^a \cos (b \ln x), \quad y_2 = x^a \sin (b \ln x). \quad (58)$$

Если $\rho_1 = \rho_2$, то $y_1 = x^{\rho_1}$. Для нахождения y_2 воспользуемся выкладками формулы (55), заметив, что в нашем случае $a_1 + 2\rho_1 = 1$ (почему?). Получим:

$$y_2 = x^{\rho_1} \int x^{-1}\, dx = x^{\rho_1} \ln x. \quad (59)$$

Как и следовало ожидать, второе решение содержит $\ln x$.

Пример 2. Найти два линейно независимых частных решения уравнения

$$x (x - 1)\, y'' - xy' + y = 0 \quad (60)$$

в окрестности особой точки $x = 0$ при помощи обобщенных степенных рядов.

Прежде всего убедимся, что $x = 0$ есть регулярная особая точка.

Деля обе части уравнения (60) на коэффициент при y'', имеем:

$$y'' + \frac{1}{1-x} y' - \frac{1}{x(1-x)} y = 0. \tag{61}$$

Коэффициент при y' голоморфен в окрестности точки $x=0$, ибо

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1), \tag{62}$$

а коэффициент при y представим в виде:

$$-\frac{1}{x(1-x)} = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+1}}{x^2} \quad (|x| < 1). \tag{63}$$

Сравнивая разложения (62) и (63) с разложениями (16), видим, что $x=0$ — регулярная особая точка.

Определяющим уравнением в особой точке $x=0$ будет

$$\rho(\rho-1) = 0 \tag{64}$$

(почему?). Его корни $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$ разнятся на целое положительное число.

Корню $\rho_1 = 1$ соответствует решение вида:

$$y_1 = x \sum_{k=0}^{\infty} c_0 x^k \quad (c \neq 0), \tag{65}$$

где ряд справа сходится по крайней мере в области $|x| < 1$ (почему?).

Подставляя (65) в (60), убеждаемся, что все c_k, кроме c_0, равны нулю. Поэтому в качестве y_1 можно взять

$$y_1 = x. \tag{66}$$

Второе частное решение может содержать $\ln x$. Пользуясь формулой (33), находим:

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x-1} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{x-1}{x^2} dx = x \ln x + 1. \tag{67}$$

Заметим, что $x=1$ — тоже регулярная особая точка, и можно построить два линейно независимых частных решения в окрестности этой особой точки.

В следующих двух пунктах мы рассматриваем два наиболее важных линейных уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, которые удается проинтегрировать при помощи обобщенных степенных рядов, а также более общих рядов вида (45) или (46)*.

* К интегрированию этих уравнений приводится интегрирование многих однородных линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (см.: В. П. Манжаловский. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Харьков, Изд. ХГУ, 1960).

192. Уравнение Бесселя *. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\ y = 0 \tag{68}$$

или

$$y'' + \frac{1}{x}\ y' + \frac{-n^2 + x^2}{x^2}\ y = 0. \tag{69}$$

К интегрированию этого уравнения приводятся многие задачи астрономии, физики и техники.

Точка $x=0$ является особой точкой уравнения (68). Так же, как и в п. 187, мы здесь рассматриваем уравнение Бесселя только для положительных значений x. Легко видеть, что уравнение Бесселя есть частный случай рассмотренного выше уравнения (14), причем $x_0=0$. Так как здесь $p_0=1$, $q_0=-n^2$, то определяющим уравнением в особой точке $x=0$ будет

$$\rho(\rho-1) + 1\cdot\rho - n^2 = 0 \quad \text{или} \quad \rho^2 - n^2 = 0. \tag{70}$$

Если $n\neq 0$, то это уравнение будет иметь два различных корня: $\rho_1=n$, $\rho_2=-n$. Будем считать $n \geqslant 0$. В нашем случае $\rho_1 - \rho_2=2n$. Поэтому в силу предыдущего пункта мы можем утверждать:

1. *Если* $2n$ *не равно целому положительному числу, т. е.* $2n\neq 2m$ и $2n\neq 2m+1$, *так что* n *не является ни целым (положительным) числом, ни половиной нечетного числа, то существуют два линейно независимых частных решения в виде обобщенных степенных рядов.*

2. *Если* $2n=m$, *где* m — *целое положительное число, то существует частное решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее бóльшему корню. Вопрос о существовании второго частного решения такого же вида требует специального рассмотрения.*

3. *Если* $n=0$, *так что* $\rho_1=\rho_2=0$ и $\rho_1-\rho_2=0$, *то существует только одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда, который в данном случае вырождается в обычный степенной ряд. Второе частное решение обязательно содержит* $\ln x$.

После этого предварительного анализа перейдем к построению решений уравнения Бесселя.

Будем искать решение уравнения Бесселя в окрестности особой точки $x=0$ в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{\rho+k} \quad (c_0 \neq 0). \tag{71}$$

---

* См. также: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II. М., Гостехиздат, 1948, стр. 141—146.

Подставляя (71) в (68), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)\,c_k\,x^{\rho+k}+\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)\,c_k\,x^{\rho+k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^{\rho+k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}n^2\,c_k\,x^{\rho+k}=0. \qquad (72)$$

Сокращая на x^ρ и объединяя вместе все суммы, кроме третьей, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\rho+k)^2-n^2]\,c_k\,x^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^{k+2}=0. \qquad (73)$$

Приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^0\colon & (\rho^2-n^2)\,c_0=0;\quad c_0\neq 0,\quad \rho^2-n^2=0,\quad \rho_1=n,\quad \rho_2=-n,\\ x^1\colon & [(\rho+1)^2-n^2]\,c_1=0,\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^k\colon & [(\rho+k)^2-n^2]\,c_k+c_{k-2}=0,\quad k\geqslant 2. \end{array}\right\} \qquad (74)$$

Построим решение, соответствующее корню $\rho_1=n$, где $n\geqslant 0$. Полагая в равенствах (74) $\rho=n$, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} [(n+1)^2-n^2]\,c_1=0,\quad (2n+1)\,c_1=0,\quad c_1=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [(n+k)^2-n^2]\,c_k+c_{k-2}=0,\quad k\geqslant 2 \end{array}\right\} \qquad (75)$$

или

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k\,(2n+k)},\quad k\geqslant 2. \qquad (76)$$

Отсюда:

$$c_{2k+1}=-\frac{c_{2k-1}}{(2k+1)\,(2n+2k+1)}, \qquad (77)$$

$$c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2k\,(2n+2k)}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2k\,(n+k)}. \qquad (78)$$

Так как $c_1=0$, то $c_{2k+1}=0$ при всех k. Полагая в формуле (78) $k=1, 2, \dots,$ выразим c_{2k} через c_0. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} c_2=-\dfrac{c_0}{2^2\cdot 1\cdot(n+1)},\\ c_4=-\dfrac{c_2}{2^2\cdot 2\cdot(n+2)}=\dfrac{c_0}{2^4\cdot 2!\,(n+1)\,(n+2)},\\ c_6=-\dfrac{c_4}{2^2\cdot 3\cdot(n+3)}=-\dfrac{c_0}{2^6 3!\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ c_{2k}=(-1)^k\dfrac{c_0}{2^{2k}k!\,(n+1)\,(n+2)\dots(n+k)}. \end{array}\right\} \qquad (79)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (71) и полагая $\rho = n$, получаем:

$$y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k} k! (n+1)(n+2)\ldots(n+k)} x^{2k}. \qquad (80)$$

Ряд справа, согласно теореме п. **191**, сходится при всех значениях x* и, следовательно, функция (80) представляет собою решение уравнения Бесселя при любом выборе числа c_0.

Перепишем (80) в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0 2^n}{k! (n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \qquad (81)$$

Выберем теперь c_0 так, чтобы коэффициенты ряда справа имели наиболее простой вид. Положим:

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}, \qquad (82)$$

где

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0) \qquad (83)$$

есть так называемая *гамма-функция***. Подставляя выбранное значение c_0 в формулу (81) и пользуясь известным свойством гамма-функции

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad (84)$$

мы получим искомое первое частное решение уравнения Бесселя в виде:

$$y_1 = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \qquad (85)$$

Функция $J_n(x)$ называется *функцией Бесселя первого рода n-го порядка.*

В частности, *функция Бесселя первого рода нулевого порядка* $J_0(x)$, т. е. первое частное решение уравнения

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (86)$$

имеет вид:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad (87)$$

ибо $\Gamma(k+1) = k!$

---

* В этом негрудно убедиться и непосредственно, пользуясь признаком Даламбера.

** См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956, стр. 169.

Если будем искать второе частное решение уравнения (68), соответствующее показателю $\rho_2 = -n$ тоже в виде обобщенного степенного ряда, то вместо формул (75), (77) и (78) мы будем иметь:

$$[(-n+1)^2 - n^2]\, c_1 = 0, \quad (-2n+1)\, c_1 = 0; \tag{88}$$

$$c_{2k+1} = -\frac{c_{2k-1}}{(2k+1)(-2n+2k+1)}; \tag{89}$$

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k(-n+k)}. \tag{90}$$

Из этих формул ясно, что если $n \neq \frac{2m+1}{2}$ и $n \neq m$, т. е. если n не равно половине нечетного числа и не является целым числом, то все коэффициенты c_k опять выразятся единственным образом через произвольный коэффициент c_0.

Полагая в этом случае

$$c_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}, \tag{91}$$

мы получим второе частное решение уравнения Бесселя в виде:

$$y_2 = J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \tag{92}$$

Функция $J_{-n}(x)$ обращается в бесконечность в особой точке $x = 0$.

В случае $n = \frac{2m+1}{2}$ мы встретим затруднение в определении коэффициента c_{2m+1}. Формула (89) даст $c_{2m+1} = \frac{0}{0}$. Положив $c_{2m+1} = 0$, мы получим второе частное решение в виде (92), так что второе частное решение не будет содержать $\ln x$.

Таким образом, *если n не равно целому числу, то общее решение уравнения Бесселя имеет вид*:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) \; (n \text{ — не целое число}). \tag{93}$$

Рассмотрим теперь случай, когда n является целым положительным числом. Здесь мы встретим затруднение при определении коэффициента c_{2n}. Формула (90) дает $c_{2n} = \frac{c_0}{0} = \infty$, так как $c_0 \neq 0$.

Следовательно, второе частное решение должно содержать логарифмический член.

Заметим, что решение (92) имеет смысл и в случае целого n, но оно уже не будет тогда линейно-независимым с решением

(85), а именно если принять во внимание, что

$$\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \ldots = \Gamma(-n+1) = \infty, \tag{94}$$

то нетрудно показать, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{95}$$

Второе частное решение уравнения Бесселя при n целом больше нуля должно содержать $\ln x$. Найдем это решение.

С этой целью рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + [x^2 - (n-\varepsilon)^2]\, y = 0 \tag{96}$$

$$(n \text{ — целое положительное, } 0 < \varepsilon < 1),$$

полученное из уравнения (68) заменой n на $n-\varepsilon$. Это уравнение имеет два линейно независимых частных решения: $y_1 = J_{n-\varepsilon}(x)$ и $y_2 = J_{-(n-\varepsilon)}(x)$. Построим, пользуясь ими, частное решение:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}. \tag{97}$$

Если существует предел функции $Y_{n-\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, то предельная функция

$$Y_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{n-\varepsilon}(x) \tag{98}$$

будет решением уравнения Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0 \quad (n \text{ — целое} > 0). \tag{99}$$

Покажем, что указанный предел существует.

Заметим, что так как $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ при n целом положительном связаны соотношением (95), то выражение (97) при $\varepsilon \to 0$ представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$, и наша задача состоит в том, чтобы раскрыть эту неопределенность.

С этой целью запишем $Y_{n-\varepsilon}(x)$ в развернутом виде, заменив $J_{-(n-\varepsilon)}(x)$ и $J_{n-\varepsilon}(x)$ их выражениями согласно формулам (92) и (85). Получим:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n-\varepsilon+k+1)\,\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}. \tag{100}$$

Преобразуем первую сумму, выделив из нее члены, в которых $\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)$ обращается в бесконечность при $\varepsilon \to 0$:

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n)!\,\Gamma(\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\varepsilon+2k}. \tag{101}$$

Подставляя это выражение в (100) и объединяя две последние суммы, имеем:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{102}$$

где

$$F_k(\varepsilon) = \frac{1}{(k+n)!\,\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{k!\,\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Найдем пределы выражений

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}\,(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1) \text{ и } \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{103}$$

Знаменатель первого из них представляет собою (при $\varepsilon \to 0$) неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Чтобы ее раскрыть, преобразуем $\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)$ (используя формулу дополнения

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}) \tag{104}$$

к следующему виду:

$$\Gamma(-n+\varepsilon+k+1) = \Gamma[1-\underbrace{(n-\varepsilon-k)}_{a}] =$$

$$= \frac{\pi}{\sin[(n-\varepsilon-k)\pi]\cdot\Gamma(n-\varepsilon-k)}. \tag{105}$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin[(n-\varepsilon-k)\pi]\cdot\Gamma(n-\varepsilon-k)}{\pi\varepsilon}, \tag{106}$$

и, пользуясь правилом Лопиталя, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\,\varepsilon}=-\cos[(n-k)\pi]\,\Gamma(n-k)=$$
$$=(-1)^{n-k+1}\,\Gamma(n-k)\;(k=0,\ 1,\dots,\ n-1). \tag{107}$$

Предел второго из выражений (103), вследствие того что $F_k(0)=0$, равен производной от функции $F_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon)-F_k(0)}{\varepsilon}=F_k'(0). \tag{108}$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon}=F_k'(0)=-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma^2(k+1)}+$$
$$+\frac{\ln\frac{x}{2}}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)}-$$
$$-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma^2(n+k+1)}+\frac{\ln\frac{x}{2}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]. \tag{109}$$

Из доказанного следует, что предел (98) существует. Имеем:

$$Y_n(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(n+k)!}\times$$
$$\times\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{110}$$

Эта функция называется *функцией Бесселя второго рода n-го порядка*. Она и дает искомое второе частное решение уравнения Бесселя в случае, когда n — целое положительное число. Это решение содержит $\ln x$ и имеет как раз вид (45), где $\gamma_{-1} = 2$, $y_1 = J_n(x)$. Решение $y_2 = Y_n(x)$, очевидно, обращается в бесконечность в особой точке $x=0$.

Выражение (110) для $Y_n(x)$ можно упростить, если воспользоваться следующей формулой для логарифмической производной от гамма-функции:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{a+\nu}\right), \tag{111}$$

где $C=0{,}5772157\ \ldots$ — *постоянная Эйлера*. Если a — целое положительное число, то

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{\nu=0}^{a-1}\frac{1}{\nu} \tag{112}$$

(почему?). Поэтому формула (110) примет вид:

$$Y_n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(2\ln\frac{x}{2} + 2C - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n+k}\frac{1}{\nu}\right) \tag{113}$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{0}\frac{1}{\nu} = 0\right).$$

В некоторых вопросах оказывается удобнее вместо $Y_n(x)$ брать функцию $\frac{1}{\pi}Y_n(x)$. Эта функция называется *функцией Вебера n-го порядка.*

Общее решение уравнения Бесселя, в случае когда n — целое положительное, может быть записано в виде:

$$y = C_1J_n(x) + C_2Y_n(x). \tag{114}$$

Рассмотрим уравнение Бесселя в случае нулевого значения n, т. е. уравнение (86)

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Первым частным решением является указанная выше функция $J_0(x)$. Так как $s=2n$, $s=0$, то второе частное решение заведомо содержит $\ln x$.

Для нахождения второго решения рассмотрим, как и в случае n — целого положительного, вспомогательное уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \varepsilon^2)\ y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1). \tag{115}$$

Построим его решение:

$$Y_{-\varepsilon}(x) = \frac{J_\varepsilon(x) - J_{-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}. \tag{116}$$

Найдем предел функции $Y_{-\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем:

$$Y_{-\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(\varepsilon + k + 1)\,\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-\varepsilon + k + 1)\,\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{117}$$

где

$$F_k(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(-\varepsilon + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}. \tag{118}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} = F_k'(0) = -\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+1)} \ln \frac{x}{2} -$$

$$- \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+1)} \ln \frac{x}{2} = \frac{2}{\Gamma(k+1)} \left[\ln \frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\right], \tag{119}$$

то

$$Y_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{-\varepsilon}(x) =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\ln \frac{x}{2} + C - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{120}$$

Функция $Y_0(x)$ называется *функцией Бесселя второго рода нулевого порядка.* Это и есть второе частное решение уравнения (86) в окрестности особой точки $x=0$. Решение (120) имеет вид (46), причем $\gamma_{-1} = 2$, $y_1 = J_0(x)$. Функция $Y_0(x)$ в особой точке $x=0$ обращается в бесконечность.

Иногда в качестве второго частного решения уравнения (86) берут $\frac{1}{\pi} Y_0(x)$. Эта функция называется *функцией Вебера нулевого порядка.*

Общее решение уравнения Бесселя (86) может быть записано так:

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x). \tag{121}$$

Вернемся теперь к уравнению Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \tag{122}$$

общее решение которого найдено в п. **186** при помощи приведения (122) к уравнению с постоянными коэффициентами. Проинтегрируем сейчас это уравнение согласно изложенной выше общей теории интегрирования уравнения Бесселя.

Так как здесь $n = \frac{1}{2}$, т. е. $n > 0$ и не равно целому числу, то оба частных решения не содержат логарифма и получаются по формулам (85) и (92). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2} + 2k}, \\ y_2 = J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + 2k}. \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *, то, используя формулу (84), получим:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2\right) = \Gamma\left[\left(\frac{3}{2} + 1\right) + 1\right] = \left(\frac{3}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + 3\right) = \Gamma\left[\left(\frac{3}{2} + 2\right) + 1\right] = \left(\frac{3}{2} + 2\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2\right) = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi},$$

. . . .

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)}{2^{k}}\sqrt{\pi}.$$

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, стр. 173.

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k+1}}{k!\,1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k}}{k!\,1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Таким образом, мы получили вновь те же частные решения, что и в п. **186**. В рассмотренном случае функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выразились через элементарные функции. Можно доказать, что *функции Бесселя со значком, равным половине нечетного числа, выражаются через элементарные функции*. Доказательство этого утверждения, а также подробное изучение многих других замечательных свойств функций Бесселя читатель найдет в «Курсе высшей математики» В. И. Смирнова *, а также в многочисленной специальной литературе о функциях Бесселя.

193. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение. *Гипергеометрическим дифференциальным уравнением или уравнением Гаусса* называется уравнение вида:

$$x(x-1)y'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)x]\,y' + \alpha\beta y = 0, \qquad (125)$$

где α, β и γ — постоянные числа, которые мы будем предполагать вещественными. Здесь $x=0$ и $x=1$ — особые точки.

Запишем уравнение (125) в виде:

$$y'' + \frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)x}{x(x-1)}y' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y = 0. \qquad (126)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{x-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}x^k \text{ при } |x|<1,$$

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III. ч. 2. М., Гостехиздат, 1956, стр. 519—564.

перепишем уравнение (126) так

$$y'' + \frac{[\gamma - (1+\alpha+\beta)\,x]\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}{x}\,y' - \frac{\alpha\beta\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}{x}\,y = 0$$

или

$$y'' + \frac{[\gamma - (1+\alpha+\beta)\,x]\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}{x}\,y' - \frac{\alpha\beta\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+1}}{x^2}\,y = 0. \qquad (126')$$

Это уравнение есть частный случай уравнения (14) п. 191, причем здесь $x_0=0$, $p_0=\gamma$, $q_0=0$, так что определяющее уравнение в особой точке $x=0$ в нашем случае имеет вид:

$$\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0. \qquad (127)$$

Его корнями будут $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1-\gamma$. Предположим, что разность этих корней не является целым числом, т. е. γ не равно ни целому числу, ни нулю. Тогда, согласно п. 191, в окрестности особой точки $x=0$ можно построить два линейно независимых частных решения в виде обобщенных степенных рядов

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ y_2 &= x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k. \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Построим сначала частное решение, соответствующее нулевому корню определяющего уравнения, т. е. решение, г о л о м о р ф н о е в окрестности особой точки $x=0$.

Итак, будем искать частное решение уравнения (125) в виде:

$$y = \sum_{k=0}^{8} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0). \qquad (129)$$

Подставляя в (125), получим:

$$x(x-1)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,c_k x^{k-2} +$$

$$+ [-\gamma + (1+\alpha+\beta)\,x]\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \qquad (130)$$

Приравняем нулю свободный член:

$$-\gamma c_1 + \alpha\beta c_0 = 0. \qquad (131)$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,c_0. \qquad (132)$$

Полагая $c_0 = 1$, получим:

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}. \tag{133}$$

Приравнивая нулю коэффициент при x^k, найдем:

$$\begin{aligned} k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} - \gamma(k+1)c_{k+1} + \\ + (1+\alpha+\beta)kc_k + \alpha\beta c_k = 0, \end{aligned} \tag{134}$$

откуда

$$c_k[k(k+\alpha+\beta)+\alpha\beta] = c_{k+1}(k+1)(k+\gamma)$$

или

$$c_k(k+\alpha)(k+\beta) = c_{k+1}(k+1)(k+\gamma), \tag{135}$$

так что

$$c_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}c_k. \tag{136}$$

Отсюда:

$$c_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}c_1 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\alpha\beta}{2(\gamma+1)\gamma} = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)},$$

$$c_3 = \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(\gamma+2)}c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \ \ldots,$$

$$c_k = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots[\alpha+(k-1)]\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots[\gamma+(k-1)]}. \tag{137}$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots[\alpha+(k-1)]\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots[\gamma+(k-1)]}x^k. \end{aligned} \tag{138}$$

Ряд справа называется *гипергеометрическим* рядом, так как при $\alpha=1$, $\beta=\gamma$ он превращается в геометрическую прогрессию

$$F(1, \beta, \beta, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}. \tag{139}$$

Согласно теореме п. **191**, ряд (138) сходится при $|x| < 1$, так же как и ряд (139), и, следовательно, представляет в этом интервале решение уравнения (125).

Второе частное решение имеет вид:

$$y = x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ (c_0 \neq 0). \tag{140}$$

Вместо того, чтобы находить c_k методом неопределенных коэффициентов, сделаем в уравнении Гаусса (125) замену искомой функции y по формуле

$$y = x^{1-\gamma} z. \tag{141}$$

Получим уравнение Гаусса

$$x(x-1)\,z'' + \{-(2-\gamma) + [1 + (\alpha + 1 - \gamma) + (\beta + 1 - \gamma)]\,x\}\,z' + \\ + (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)\,z = 0, \tag{142}$$

в котором роль параметров α, β и γ играют $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$ и $2 - \gamma$.

Поэтому, построив частное решение z_1 этого уравнения, соответствующее нулевому корню определяющего уравнения и подставив его в (141), получим второе частное решение данного уравнения Гаусса (125) в виде:

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \quad (|x| < 1). \tag{143}$$

Общим решением уравнения Гаусса (125) будет:

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma;\ x) + \\ + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \quad (|x| < 1). \tag{144}$$

Напоминаем, что в формулах (138), (143) и (144), согласно сделанному предположению, число γ не равно ни целому числу, ни нулю. Если, в частности, $\gamma = 1$, то первое частное решение (138) сохраняет смысл, в то время как второе частное решение обязательно должно содержать $\ln x$, ибо в этом случае оба корня определяющего уравнения будут одинаковые:

$$\rho_1 = 0,\ \rho_2 = 1 - \gamma = 0.$$

Более подробное и более глубокое рассмотрение уравнения Гаусса дается в аналитической теории дифференциальных уравнений* .

Рассмотрим уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + n(n + 1)\,y = 0. \tag{145}$$

Точки $x = \pm 1$ являются **регулярными** особыми точками (почему?). Определяющим уравнением в особой точке $x = 1$ будет [см. (26)]

$$\rho(\rho - 1) + \rho = 0 \text{ или } \rho^2 = 0\ (\rho_1 = \rho_2 = 0) \tag{146}$$

(почему?). Здесь $\rho_{1,2} = 0$. Поэтому одно решение в окрестности особой точки $x = 1$ будет обычным степенным рядом по степеням разности $x - 1$, а второе обязательно содержит $\ln(x - 1)$. Аналогичные результаты получаются и для особой точки $x = -1$.

---

* См. предыдущую сноску.

Интегрирование уравнения Лежандра может быть приведено к интегрированию уравнения Гаусса. Действительно, полагая

$$x = 1 - 2t, \tag{147}$$

получим:

$$t(t-1)y'' + (-1+2t)y' - n(n+1)y = 0. \tag{148}$$

Это уравнение Гаусса с параметрами $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$. Особой точке $x = 1$ соответствует особая точка $t = 0$. Определяющее уравнение в особой точке $t = 0$, $\rho(\rho-1)+\rho=0$ имеет равные корни $\rho_{1,2} = 0$. Следовательно,

$$y_1 = F(n+1, -n, 1; t). \tag{149}$$

Поэтому первым частным решением уравнения Лежандра в окрестности особой точки $x=1$ будет

$$y = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{150}$$

Если n — целое положительное число, то ряд (149) обрывается на n-й степени t (почему?). Поэтому решение (150) является полиномом n-й степени от x:

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right) \tag{151}$$

(n — целое положительное).

Этот полином называется *полиномом Лежандра* n-й степени. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что для уравнения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \tag{152}$$

где λ — параметр, единственными значениями параметра λ, при которых уравнение (152) имеет частные решения, конечные в особых точках $x = \pm 1$, являются $\lambda = n\ (n+1)$, где n — целое положительное число. Этими решениями, как показано выше, являются полиномы Лежандра.

Вид второго частного решения во всех случаях может быть установлен при помощи формулы (33).

Можно доказать, что

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{153}$$

Доказательство этой формулы и рассмотрение замечательных свойств полиномов Лежандра имеется, например, в «Курсе высшей математики» В. И. Смирнова*. Там же** рассмотрены более общие полиномы — полиномы Якоби.

§ 4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

194. Колеблющиеся и неколеблющиеся решения. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о нулях ненулевых решений однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

причем *нулями решения* $y=y(x)$ мы называем вещественные корни уравнения $y(x)=0$. Относительно коэффициентов уравнения (1) мы будем предполагать, что они непрерывны на некотором интервале (a, b).

В отличие от ненулевых решений однородного линейного уравнения первого порядка [32], ненулевое решение уравнения (1) может обращаться в нуль в интервале непрерывности коэффициентов, т. е. оно может иметь общую точку с осью Ox. Но касаться оси Ox это решение не может [130]. Поэтому решение уравнения (1) либо пересекает ось Ox, либо не имеет с ней ни одной общей точки. Отсюда следует, что ненулевое решение уравнения (1) при переходе через нуль обязательно меняет знак [при сделанном предположении относительно непрерывности коэффициентов уравнения (1)]. Поэтому чем больше нулей имеет решение, тем чаще оно меняет знак или, как говорят, тем сильнее оно колеблется.

Заметим, что *все нули любого ненулевого решения* $y=y(x)$ *уравнения* (1), *лежащие внутри интервала* (a, b), *изолированы*, т. е. если x_0 есть нуль решения $y=y(x)$, то существует такая окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки $x=x_0$, внутри которой нет ни одного нуля решения $y=y(x)$. В самом деле, в противном случае точка $x=x_0$ была бы точкой сгущения нулей решения $y=y(x)$, так что существовала бы последовательность нулей x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к x_0. Покажем, что $y'(x_0)=0$. Мы имеем:

$$y'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h}.$$

Так как $y'(x_0)$ существует, то для вычисления $y'(x_0)$ достаточно устремить h к нулю по какому-нибудь одному закону. Положим $h=x_n-x_0$. Тогда

---

* В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. М., Гостехиздат, 1956, стр. 376—382.

** Там же, стр. 382—385.

$$y'(x_0)=\lim_{x_n\to x_0}\frac{y(x_n)-y(x_0)}{x_n-x_0}=0, \text{ ибо } y(x_n)=y(x_0)=0.$$

Итак, мы имели бы: $y(x_0)=0$ и $y'(x_0)=0$, причем $x_0\in(a, b)$; а тогда, в силу п. **130**, решение $y=y(x)$ — нулевое, вопреки предположению.

Из доказанного следует, что ненулевое решение уравнения (1) не может иметь бесконечного числа нулей на замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b) [т. е. внутри интервала непрерывности коэффициентов уравнения (1)], и, следовательно, оно может менять знак внутри интервала $[\alpha, \beta]$ только конечное число раз.

Прежде чем перейти к изучению колебательного характера решений уравнения (1) общего вида, рассмотрим следующие два однородных линейных уравнения второго порядка

$$y''-k^2y=0,\ y''+k^2y=0\ (k\neq 0). \tag{2}$$

Из общих решений этих уравнений

$$y=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx},$$

$$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx=A\sin(kx+\varphi),$$

видно, что всякое решение первого уравнения имеет не более одного нуля в любом интервале (a, b), в то время как всякое решение второго уравнения, представляя собою гармоническое колебание с периодом $T=\frac{2\pi}{k}$, имеет, по крайней мере, два нуля во всяком интервале (a, b), длина которого больше $\frac{2\pi}{k}$.

Решение дифференциального уравнения (1) называется *колеблющимся* в интервале (a, b), если оно имеет внутри этого интервала не менее двух нулей. В противном случае решение называется *неколеблющимся* в интервале (a, b). Очевидно, что все решения первого из уравнений (2) — неколеблющиеся в любом интервале, а все решения второго из этих уравнений — колеблющиеся во всяком интервале, длина которого больше $\frac{2\pi}{k}$.

Уравнения (2) имеют постоянные коэффициенты, причем в первом из них коэффициент при искомой функции отрицательный, а во втором — положительный. Вообще, для уравнения

$$y''+qy=0, \tag{3}$$

где q — постоянное число, колебательный характер решений определяется знаком q. Заметим, что если $q=0$, то мы имеем уравнение

$$y''=0, \tag{4}$$

все решения которого, очевидно, неколеблющиеся. Следовательно, условие

$$q \leqslant 0 \tag{5}$$

является достаточным условием отсутствия колеблющихся решений уравнения (3).

При изучении колебательного характера решений уравнения (1) с переменными коэффициентами достаточно ограничиться рассмотрением уравнения

$$y'' + q(x)\,y = 0, \tag{6}$$

ибо, как доказано в п. **186**, уравнение (1) приводится к уравнению вида (6) при помощи подстановки

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2}\,dx} z. \tag{7}$$

Оказывается, что условие (5) распространяется и на случай, когда q есть функция от x. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если $q(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и удовлетворяет условию*

$$q(x) \leqslant 0 \text{ при } a < x < b, \tag{8}$$

то всякое ненулевое решение уравнения (6) *будет неколеблющимся в (a, b).*

Допустим противное. Пусть существует ненулевое решение $y = y(x)$, колеблющееся в интервале (a, b), т. е. существуют два значения x_0 и x_1 из этого интервала такие, что $y(x_0) = 0$ и $y(x_1) = 0$. Будем считать, что x_0 — меньший корень, так что $a < x_0 < x_1 < b$. Предположим, что между x_0 и x_1 решение $y = y(x)$ не обращается в нуль. Не умаляя общности, будем считать, что $y(x) > 0$ в интервале (x_0, x_1). Тогда $y'(x_0) > 0$. В самом деле, так как $y(x_0) = 0$ и $y(x) > 0$ в (x_0, x_1), то $y'(x_0) \geqslant 0$. Но $y'(x_0) \neq 0$*. Поэтому $y'(x_0) > 0$.

Перепишем уравнение (6) в виде:

$$y'' = -q(x)\,y. \tag{9}$$

Отсюда ясно, что $y''(x) \geqslant 0$ в интервале $[x_0, x_1]$. Поэтому $y'(x)$ не убывает в этом интервале и, следовательно,

$$y'(x) \geqslant y'(x_0) > 0 \text{ при } x_0 < x < x_1. \tag{10}$$

По формуле конечных приращений имеем:

$$y(x_1) - y(x_0) = y'(\xi)(x_1 - x_0), \quad x_0 < \xi < x_1.$$

Здесь левая часть равна нулю, а правая положительна, что

* Ибо, если $y'(x_0) = 0$, то мы имеем: $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, а тогда $y(x) \equiv 0$ в (a, b), вопреки предложению.

невозможно. Следовательно, наше предположение о существовании ненулевого решения $y=y(x)$, колеблющегося в интервале (a, b), неверно.

Замечание. *Если $q(x) \leqslant 0$ при всех значениях x, то все ненулевые решения уравнения* (6) — *неколеблющиеся в любом конечном интервале, так что всякая интегральная кривая пересекает ось Ox не больше одного раза.*

195. Теорема Штурма. Рассматривая два линейно независимых решения второго из уравнений (2), $y_1=\cos kx$, $y_2=\sin kx$, мы видим, что нули этих решений взаимно разделяют друг друга: между двумя последовательными нулями одного решения лежит один и только один нуль другого решения. Оказывается, что этим свойством обладают любые линейно независимые решения всякого однородного линейного уравнения второго порядка, имеющего колеблющиеся решения.

Теорема Штурма. *Нули двух линейно независимых решений однородного линейного уравнения*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{11}$$

взаимно разделяют друг друга.

Пусть $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ линейно независимые решения уравнения (11). Предположим, что $y_1=y_1(x)$ имеет два нуля x_0 и x_1, причем эти нули последовательные, т. е. $y_1(x) \neq 0$ при $x_0 < x < x_1$. Докажем, что существует одна и только одна точка $\bar{x}$, $x_0<\bar{x}<x_1$, в которой $y_2(\bar{x})=0$.

Предположим противное. Пусть $y_2(x) \neq 0$ для $x_0<x<x_1$. Не умаляя общности, будем считать, что $y_2(x)>0$ для $x_0<x<x_1$. На концах интервала $[x_0, x_1]$ решение $y_2(x)$ не обращается в нуль, $y_2(x_0) \neq 0$ и $y_2(x_1) \neq 0$, так как в противном случае вронскиан $W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2$ обращался бы в нуль в точках x_0 и x_1, что противоречило бы линейной независимости y_1 и y_2. Не нарушая общности, будем считать $W(x)>0$ в интервале $[x_0, x_1]$.

Напишем тождество

$$-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=\frac{W(x)}{y_2^2}. \tag{12}$$

Умножая обе части этого тождества на dx и интегрируя в пределах от $x=x_0$ до $x=x_1$, получаем:

$$-\left[\frac{y_1}{y_2}\right]_{x=x_0}^{x=x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{W(x)}{y_2^2}\,dx. \tag{13}$$

Здесь левая часть равна нулю, а правая положительна, что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно. Итак, существует точка $\bar{x}$, $x_0<\bar{x}<x_1$, в которой $y_2(\bar{x})=0$.

При этом существует только одна такая точка, ибо в противном случае, меняя ролями y_1 и y_2, мы нашли бы точку $\bar{\bar{x}}$, $x_0 < \bar{\bar{x}} < x_1$, в которой $y_1(\bar{\bar{x}}) = 0$, а это противоречит тому, что x_0 и x_1 — последовательные нули решения $y_1 = y_1(x)$. Теорема полностью доказана.

Теорема Штурма дает возможность сравнивать колебательный характер линейно независимых частных решений одного и того же однородного линейного уравнения второго порядка (11), так что если колебательный характер одного из частных решений известен, то тем самым известен и колебательный характер любого другого частного решения. В частности, оба линейно независимые решения уравнения (11) являются колеблющимися в интервале (a, b), если одно из них имеет в этом интервале более двух нулей.

196. Теорема сравнения. Выше мы рассматривали колебательный характер решений одного и того же дифференциального уравнения. Естественно поставить вопрос о сравнении колебательного характера решений двух различных дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, такие два уравнения:

$$y'' + y = 0; \; z'' + 4z = 0. \tag{14}$$

Сравнивая их решения:

$$y_1 = \cos x, \; y_2 = \sin x; \; z_1 = \cos 2x, \; z_2 = \sin 2x, \tag{15}$$

видим, что между любыми двумя нулями любого из решений первого уравнения лежит хоть один нуль любого из решений второго уравнения.

Нетрудно убедиться, что такое же утверждение имеет место для любых двух уравнений вида:

$$y'' + q_1 y = 0; \; z'' + q_2 z = 0, \tag{16}$$

где q_1 и q_2 — постоянные положительные числа, причем $q_2 > q_1$. Обобщая этот результат на случай уравнений с переменными коэффициентами при y, приходят к следующей теореме.

Теорема сравнения. *Если даны два уравнения:*

$$y'' + q_1(x)\, y = 0; \; z'' + q_2(x)\, z = 0, \tag{17}$$

в которых функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ непрерывны в интервале (a, b) и

$$q_2(x) \geqslant q_1(x) \text{ при } a < x < b, \tag{18}$$

то между каждыми двумя последовательными нулями любого решения $y = \bar{y}(x)$ первого уравнения лежит хоть один нуль любого решения $z = \bar{z}(x)$ второго уравнения, если в интервале между этими нулями существуют точки, в которых $q_2(x) > q_1(x)$.

Пусть x_0 и x_1 — последовательные нули решения $\bar{y}=\bar{y}(x)$. Нужно доказать, что существует такое x^*, $x_0 < x^* < x_1$, для которого $\bar{z}(x^*)=0$.

Предположим противное, т. е. $\bar{z}(x) \neq 0$ в интервале (x_0, x_1). Не умаляя общности, будем считать, что $\bar{y}(x) > 0$ и $\bar{z}(x) > 0$ в интервале (x_0, x_1). На концах этого интервала функция $\bar{y}(x)$ обращается в нуль, а значения функции $\bar{z}(x)$ неотрицательны. Напишем тождества:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}'' + q_1(x)\,\bar{y} = 0, \\ \bar{z}'' + q_2(x)\,\bar{z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Умножая их соответственно на $\bar{z}$ и $\bar{y}$ и вычитая второе из первого, получим:

$$\bar{y}''\bar{z} - \bar{z}''\bar{y} = [q_2(x) - q_1(x)]\bar{y}\bar{z} \tag{20}$$

или

$$(\bar{y}'\bar{z} - \bar{z}'\bar{y})' = [q_2(x) - q_1(x)]\,\bar{y}\bar{z}. \tag{21}$$

Умножая на dx, интегрируя в пределах от $x=x_0$ до $x=x_1$ и принимая во внимание, что $\bar{y}(x_0)=\bar{y}(x_1)=0$, получаем:

$$\bar{y}'(x_1)\,\bar{z}(x_1) - \bar{y}'(x_0)\,\bar{z}(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} [q_2(x) - q_1(x)]\,\bar{y}\bar{z}\,dx. \tag{22}$$

Так как $\bar{y}'(x_0) > 0$, $\bar{y}'(x_1) < 0$*, $\bar{z}(x_0) \geqslant 0$, $\bar{z}(x_1) \geqslant 0$, то левая часть равенства (22) неположительна, в то время как правая часть положительна. Полученное противоречие и доказывает теорему. Сравнивая колебательный характер решений уравнений (17), говорят, что решения второго уравнения являются более колеблющимися, чем решения первого.

Замечание. *Если x_0 является общим нулем двух каких-либо частных решений $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ уравнений (17) и если в интервале между x_0 и следующим за x_0 нулем x_1 решения $\bar{y}(x)$ существуют точки, где $q_2(x) > q_1(x)$, а в остальных точках этого интервала $q_2(x) \geqslant q_1(x)$, то ближайший справа к x_0 нуль решения $\bar{z}(x)$ расположен левее, чем x_1***. В самом деле, допустив, что $\bar{z}(x)$ сохраняет знак в интервале (x_0, x_1), мы опять увидим, что равенство (22) будет противоречивым.

Обычно, применяя теорему сравнения в качестве одного из

---

* См. доказательство теоремы п. **194**.

** Для решений $\sin x$ и $\sin 2x$ уравнений (14), имеющих общий нуль $x=0$, это утверждение очевидно.

уравнений (17), берут уравнение с постоянным коэффициентом при y:

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{23}$$

Дадим в качестве примера оценку расстояния между последовательными нулями колеблющихся решений уравнения

$$y'' + q(x)\,y = 0, \tag{24}$$

где $q(x)$ непрерывна и положительна в интервале $[a, b]$.

Обозначим через M и m наибольшее и наименьшее значения функции $q(x)$ в интервале $[a, b]$.

Так как расстояние между последовательными нулями решений уравнений (23) равно $\frac{\pi}{k}$, то, применяя теорему сравнения последовательно к уравнениям

$$y'' + my = 0;\ \ z'' + q(x)\,z = 0 \tag{25}$$

и к уравнениям

$$y'' + q(x)\,y = 0;\ \ z'' + Mz = 0, \tag{26}$$

получаем, что расстояние между последовательными нулями решений уравнения (24) не больше, чем $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$, и не меньше, чем $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0 \tag{27}$$

в интервале $0 < x < +\infty$. Приведем его к виду (24). Для этого положим*

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}\ , \tag{28}$$

после чего получим:

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0. \tag{29}$$

Здесь коэффициент при z будет больше 1 при $n^2 < \frac{1}{4}$ и меньше 1 при $n^2 > \frac{1}{4}$.

Поэтому, сравнивая уравнение (29) с уравнением

$$y'' + y = 0, \tag{30}$$

мы видим, что расстояние между последовательными нулями функций Бесселя меньше, чем π при $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$, и больше, чем π при $n > \frac{1}{2}$ и $n < -\frac{1}{2}$.

---

* См. п. 186.

При $n = \pm \frac{1}{2}$ расстояние между последовательными нулями функций Бесселя в точности равно π. Этот факт очевиден, ибо соответствующими функциями Бесселя являются

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{31}$$

Так как при $x \to \infty$ коэффициент при z в уравнении (29) стремится к 1, то расстояние между последовательными нулями любой функции Бесселя стремится к π, когда x неограниченно возрастает, т. е. колебательный характер функций $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ приближается к колебательному характеру функций $\sin x$ и $\cos x$. Этот результат вполне согласуется с приближенной формулой *

$$J_n(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) (x > 0), \tag{32}$$

дающей возможность вычислять значения функции $J_n(x)$ при достаточно больших положительных значениях x.

Пример 2. Изучить колебательный характер решений уравнения

$$y'' + xy = 0 \tag{33}$$

при изменении x в интервале $0 < x < +\infty$. Сравнивая это уравнение с уравнением

$$z'' + k^2 z = 0, \tag{34}$$

мы видим, что если $x > k^2$, то расстояние между последовательными нулями решений уравнения (33) меньше, чем $\frac{\pi}{k}$. Следовательно, при неограниченном возрастании x это расстояние будет стремиться к нулю, так что последовательные нули любого из решений уравнения (33) при неограниченном возрастании x будут неограниченно сближаться.

Рассмотренные примеры показывают, что изучение колебательного характера решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка даст нам некоторое представление о качественном поведении этих решений, которое не всегда удается усмотреть из аналитического представления решений. Более того исследование колебательного характера решений даже не предполагает знания аналитической структуры решений.

Некоторые дополнительные сведения по вопросу о колеблющихся решениях читатель найдет в книге В. В. Степанова **.

---

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. М., Гостехиздат, 1956, стр. 420. Для $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ формула (32) является точной.

** В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 250—259.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

197. Предварительные замечания. В настоящей главе мы рассмотрим один специальный класс нормальных систем дифференциальных уравнений — линейные системы дифференциальных уравнений. Это системы вида*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)\,y_1 + p_{12}(x)\,y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\,y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)\,y_1 + p_{22}(x)\,y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\,y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)\,y_1 + p_{n2}(x)\,y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\,y_n + f_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\,y_l + f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1'}$$

Решения линейных систем обладают некоторыми замечательными свойствами, которые дают возможность изучить структуру общего решения этих систем (и даже в некоторых частных случаях получить общее решение в элементарных функциях или в квадратурах), а также исследовать вопросы аналитической теории, качественной теории и теории устойчивости решений (движений), теории колебаний и других разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений более полно, чем это сделано для нормальных систем общего вида.

Интерес к разработке проблем теории линейных систем, так

---

* См. п. **101**.

же как линейных уравнений n-го порядка и систем линейных уравнений высшего порядка, является следствием многочисленных приложений этих систем* .

Вместе с тем, изучение нормальных систем общего вида и решение связанных с ними вопросов прикладного характера во многих случаях удается свести к рассмотрению соответствующих линейных систем уравнений.

При изложении общей теории линейных систем мы будем заниматься главным образом изучением структуры общего решения этих систем.

Будем предполагать, что в системе (1) коэффициенты $p_{kl}(x)(k,\ l=1,\ 2,\ldots,n)$ и функции $f_k(x)(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны в интервале $(a,\ b)$. Тогда, согласно теореме Пикара п. **126**, система (1) имеет единственное решение

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n=y_n^{(0)}\ \text{при}\ x=x_0,$$

где $x=x_0$ — любая точка из интервала $(a,\ b)$, а начальные значения искомых функций, т. е. числа $y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}$ можно выбирать произвольно. Это решение будет определено во всем интервале $(a,\ b)$, т. е. во всем интервале непрерывности функций $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$.

Существование общего решения системы (1) при наших предположениях относительно $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ следует из теоремы п. **136**. Особых решений линейная система (1) не имеет. Всякое решение этой системы является частным решением.

Если все функции $f_k(x)\equiv 0$ в $(a,\ b)$, то система (1), как мы уже сказали в п. **127**, называется однородной. В этом случае система (1) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=p_{11}(x)\,y_1+p_{12}(x)\,y_2+\ldots+p_{1n}(x)\,y_n,\\
\frac{dy_2}{dx}&=p_{21}(x)\,y_1+p_{22}(x)\,y_2+\ldots+p_{2n}(x)\,y_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=p_{n1}(x)\,y_1+p_{n2}(x)\,y_2+\ldots+p_{nn}(x)\,y_n
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

или

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)\,y_l\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{2'}$$

Если же в системе (1) не все функции $f_k(x)$ тождественно равны нулю, то такая система называется *неоднородной*.

---

* См. начало п. **156**.

Прежде чем перейти к изучению структуры общего решения линейных систем, отметим два общих свойства линейной системы (1), аналогичные общим свойствам линейного уравнения n-го порядка* .

1. *Линейная система* (1) *остается линейной при любой замене независимой переменной*

$$x = \varphi(t), \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — *любая функция от* t, *определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале* (t_0, t_1), *причем* $a=\varphi(t_0)$, $b=\varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ *во всем интервале* (t_0, t_1).

2. *Линейная система* (1) *остается линейной при любом линейном преобразовании неизвестных функций:*

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}(x) y_1 + \alpha_{12}(x) y_2 + \ldots + \alpha_{1n}(x) y_n, \\ z_2 &= \alpha_{21}(x) y_1 + \alpha_{22}(x) y_2 + \ldots + \alpha_{2n}(x) y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= \alpha_{n1}(x) y_1 + \alpha_{n2}(x) y_2 + \ldots + \alpha_{nn}(x) y_n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где коэффициенты преобразования $\alpha_{ik}(x)$ *суть непрерывно дифференцируемые в интервале* (a, b) *функции от* x, *причем определитель, составленный из них, отличен от нуля во всем интервале* (a, b).

Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю.

Общая теория линейных систем во многом аналогична общей теории линейного уравнения n-го порядка. В частности, как мы покажем п. **210**, вопрос построения общего решения неоднородной системы приводится к построению общего решения однородной системы.

Поэтому мы займемся сначала выяснением структуры общего решения однородной системы.

198. Свойства решений однородной системы. Наша окончательная задача состоит в нахождении всех вещественных решений системы (2). Однако для решения этой задачи так же, как и в случае однородного линейного уравнения n-го порядка, иногда оказывается выгодно сначала найти некоторые комплексные решения. Введем понятие о комплексном решении однородной системы (2).

Рассмотрим совокупность комплексных функций от вещественной переменной x:

$$\left.\begin{aligned} &y_1(x) = u_1(x) + iv_1(x),\ \ y_2(x) = u_2(x) + iv_2(x), \ldots, \\ &y_n(x) = u_n(x) + iv_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

* См. пп. **157**, **158**.

Здесь $u_1(x)$, $v_1(x)$, $u_2(x)$, $v_2(x), \ldots, u_n(x)$, $v_n(x)$ суть вещественные функции от вещественной переменной x.

Будем называть совокупность функций (5) *комплексным решением* однородной системы (2) в интервале (a, b), если эти функции обращают все уравнения системы (2) в тождества для $a < x < b$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1(x)}{dx} &\equiv p_{11}(x)\,y_1(x) + p_{12}(x)\,y_2(x) + \ldots + p_{1n}(x)\,y_n(x),\\
\frac{dy_2(x)}{dx} &\equiv p_{21}(x)\,y_1(x) + p_{22}(x)\,y_2(x) + \ldots + p_{2n}(x)\,y_n(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n(x)}{dx} &\equiv p_{n1}(x)\,y_1(x) + p_{n2}(x)\,y_2(x) + \ldots + p_{nn}(x)\,y_n(x)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dx} + i\frac{dv_1}{dx} &\equiv p_{11}(u_1 + iv_1) + p_{12}(v_2 + iv_2) + \ldots + p_{1n}(u_n + iv_n),\\
\frac{du_2}{dx} + i\frac{dv_2}{dx} &\equiv p_{21}(u_1 + iv_1) + p_{22}(u_2 + iv_2) + \ldots + p_{2n}(u_n + iv_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{du_n}{dx} + i\frac{dv_n}{dx} &\equiv p_{n1}(u_1 + iv_1) + p_{n2}(u_2 + iv_2) + \ldots + p_{nn}(u_n + iv_n)\\
&\qquad (a < x < b).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Так как два комплексных выражения равны друг другу тогда и только тогда, когда равны соответственно их вещественные и мнимые части, то, приравнивая в тождествах (7) вещественные и мнимые части, видим, что если система (2) имеет комплексное решение (5), то она имеет два вещественных решения

$$\left.\begin{aligned}
&u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\\
&v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,\ v_n(x),
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

т. е. *вещественные и мнимые части функций, составляющих комплексное решение системы* (2), *образуют два вещественных решения этой системы.*

Решения однородной системы (2) обладают следующими характерными свойствами, аналогичными свойствам решений однородного линейного уравнения n-го порядка.

1. *Если*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots,\ y_n = \varphi_n(x) \tag{9}$$

есть решение однородной системы (2), *то*

$$y_1 = C\varphi_1(x),\ y_2 = C\varphi_2(x), \ldots,\ y_n = C\varphi_n(x), \tag{10}$$

где C — *произвольная постоянная, тоже будет решением этой* *системы, т. е. умножая все функции, составляющие решение однородной системы, на* о д н у *и* т у *же постоянную, мы снова получаем решение.*

Действительно, подставляя функции (10) в систему (2), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
[C\varphi_1(x)]' &= p_{11}(x)\,[C\varphi_1(x)] + p_{12}(x)\,[C\varphi_2(x)] + \ldots + \\
&\quad + p_{1n}(x)\,[C\varphi_n(x)], \\
[C\varphi_2(x)]' &= p_{21}(x)\,[C\varphi_1(x)] + p_{22}(x)\,[C\varphi_2(x)] + \ldots + \\
&\quad + p_{2n}(x)\,[C\varphi_n(x)], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[C\varphi_n(x)]' &= p_{n1}(x)\,[C\varphi_1(x)] + p_{n2}(x)\,[C\varphi_2(x)] + \ldots + \\
&\quad + [p_{nn}(x)\,[C\varphi_n(x)].
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Сокращая на C, мы получим тождества, так как функции (9) составляют решение системы (2). Поэтому равенства (11) выполняются тождественно, что и требовалось доказать.

2. *Пусть дано m решений системы* (2), записанных в виде таблицы:

$$\left.\begin{aligned}
&1\text{-решение: } y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\
&2\text{-решение: } y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m\text{-решение: } y_{m1},\ y_{m2},\ \ldots,\ y_{mn}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Здесь первый индекс обозначает номер решения, а второй — номер функции. Например, y_{12} — вторая функция первого решения, а y_{21} — первая функция второго решения.

Докажем, что *линейная комбинация решений* (12) *с любыми постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_m$, т. е. совокупность функций*

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= C_1y_{11} + C_2y_{21} + \ldots + C_my_{m1}, \\
y_2 &= C_1y_{12} + C_2y_{22} + \ldots + C_my_{m2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= C_1y_{1n} + C_2y_{2n} + \ldots + C_my_{mn},
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — любые постоянные числа, или короче,*

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} C_i\, y_{ik}\ (k = 1,\ 2, \ldots,\ n), \qquad (14)$$

тоже будет решением системы (2).

---

* Первая функция y_1 является линейной комбинацией первых функций из каждого решения; y_2 — комбинацией вторых функций, . . . ; y_n — комбинацией n-х функций, причем постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$ для всех комбинаций берутся о д н и и т е ж е.

В самом деле, подставляя (14) в $(2')$, имеем:

$$\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik}\right]' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{il}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y'_{ik} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_{il} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Так как имеют место тождества

$$y'_{ik} \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_{il} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m), \tag{17}$$

являющиеся результатом подстановки i-го решения в систему $(2')$, то равенства (16), а следовательно и равенства (15) выполняются тождественно, что и доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что нам известно n частных решений однородной системы (2). Поставим основной вопрос: при каком условии линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ даст общее решение однородной системы. Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем понятие о линейной независимости систем функций.

199. Понятие о линейной независимости систем функций. Рассмотрим m систем функций:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m1},\ y_{m2},\ \ldots,\ y_{mn}. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Эти системы называются *линейно независимыми* в интервале (a, b), если не существует чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не равных одновременно нулю, при которых для всего интервала (a, b) выполнялись бы соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + \ldots + \alpha_m y_{m1} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{12} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_m y_{m2} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{1n} + \alpha_2 y_{2n} + \ldots + \alpha_m y_{mn} \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{19}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

т. е. если никакие линейные комбинации функций каждого столбца таблицы (18), с одними и теми же для всех столбцов постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не равны нулю в интервале (a, b) или, что то же, если ни одна строка таблицы (18) не является в интервале (a, b) линейной комбинацией всех остальных строк. В противном случае системы (18) называются *линейно зависимыми* в (a, b).

В частности, две системы функций:

$$\left.\begin{matrix} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n} \end{matrix}\right\} \tag{21}$$

будут линейно независимыми в интервале (a, b), если не существует соотношения вида:

$$\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \ldots = \frac{y_{2n}}{y_{1n}} = k \; (a < x < b) \tag{22}$$

при $k \neq 0$; при этом имеется в виду, что все отношения, входящие в (22), определены во всех точках интервала (a, b).

Очевидно, что *если одна из систем функций (18) состоит из функций, тождественно равных нулю в интервале (a, b), то эти системы функций линейно зависимы в (a, b).*

В самом деле, пусть, например,

$$y_{11} \equiv 0, \; y_{12} \equiv 0, \; \ldots, \; y_{1n} \equiv 0 \text{ в } (a, b). \tag{23}$$

Тогда при любом $\alpha_1 \neq 0$ и при $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ будут выполняться соотношения (19) в интервале (a, b), а это и означает, что системы функций (18) линейно зависимы в (a, b).

Пример 1. Системы функций

$$\left.\begin{matrix} y_{11} = e^{3x}, & y_{12} = e^{3x}, & y_{13} = e^{3x}, \\ y_{21} = e^{6x}, & y_{22} = -2e^{6x}, & y_{23} = e^{6x} \end{matrix}\right\} \tag{24}$$

линейно независимы в $(-\infty, +\infty)$.

Пример. 2. *Предположим, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различные числа (вещественные или комплексные). Тогда система функций*

$$\left.\begin{matrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, & \gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, & \ldots, & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}, \end{matrix}\right\} \tag{25}$$

где в каждой строке хоть один из коэффициентов γ_{ik} отличен от нуля, линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Допустим противное. Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что имеют тождества

$$\alpha_1\gamma_{1k}e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\gamma_{2k}e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n\gamma_{nk}e^{\lambda_n x} = 0 \; (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Здесь все коэффициенты $\alpha_i\gamma_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) при функциях $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., $e^{\lambda_n x}$ равны нулю, так как при сделанном предположении относительно чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ эти функции линейно независимы в $(-\infty, +\infty)$*. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда хоть одно из произведений $\alpha_1\gamma_{1k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) отлично от нуля, что противоречит сказанному выше.

Следовательно, системы функций (25) линейно независимы в $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Системы функций

$$\left.\begin{array}{l} y_{11} = e^{3x},\ y_{12} = e^{3x},\ y_{13} = e^{3x}, \\ y_{21} = 2e^{3x},\ y_{22} = 2e^{3x},\ y_{23} = 2e^{3x} \end{array}\right\} \tag{27}$$

линейно зависимы в $(-\infty, +\infty)$.

Пример 4. Системы функций

$$\left.\begin{array}{lll} y_{11} = e^{-2x}, & y_{12} = 0, & y_{13} = -e^{-2x}, \\ y_{21} = 0, & y_{22} = e^{-2x}, & y_{23} = -e^{-2x} \end{array}\right\} \tag{28}$$

линейно независимы в $(-\infty, +\infty)$.

Пример 5. Системы функций

$$\left.\begin{array}{lll} y_{11} = e^{-2x}, & y_{12} = 0, & y_{13} = -e^{-2x}, \\ y_{21} = 2e^{-2x}, & y_{22} = 0, & y_{23} = -2e^{-2x} \end{array}\right\} \tag{29}$$

линейно зависимы в $(-\infty, +\infty)$.

Если рассматривать элементы каждой строки таблицы (18) как составляющие некоторого вектора в n-мерном пространстве, то данное выше определение линейной независимости систем функций (18) будет ни чем иным, как известным определением линейной независимости m векторов**.

200. Необходимое условие линейной зависимости n систем функций. Пусть мы имеем n систем функций:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \ldots,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \tag{30}$$

Введем в рассмотрение определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Этот определитель называется *определителем Вронского* для систем функций (30) или *вронскианом* этих систем функций.

Теорема. *Если n систем функций* (30) *линейно зависимы в интервале (a, b), то $W(x) \equiv 0$ в (a, b).*

---

* См. п. **160**, пример 4.

** См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 48.

В самом деле, мы имеем соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n; \ a < x < b), \tag{32}$$

где не все α_i равны нулю.

Рассматривая систему (32) как однородную линейную систему алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$, мы видим, что она имеет ненулевое решение, а тогда, как известно из алгебры, определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель как раз и является вронскианом, так что последний должен обращаться в нуль во всех точках интервала (a, b).

201. Необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородной линейной системы n уравнений. Пусть теперь каждая из систем функций (30) является решением системы (2), так что мы имеем n решений:

$$\left.\begin{matrix} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nn}. \end{matrix}\right\} \tag{33}$$

Теорема. *Если n решений (33) линейно независимы в интервале (a, b), в котором определены и непрерывны $p_{kl}(x)$, то их вронскиан не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.*

Предположим обратное. Пусть $W(x_0) = 0$, причем $a < x_0 < b$. Составим систему n уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (y_{ik})_0 = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{34}$$

где $(f)_0 = f(x_0)$. Определитель системы (34) равен нулю, так как он равен $W(x_0)$. Поэтому система (34) имеет ненулевое решение

$$C_1 = C_1^{(0)}, \ C_2 = C_2^{(0)}, \ \ldots, \ C_n = C_n^{(0)}. \tag{35}$$

Воспользовавшись формулой (14) при $m = n$, построим теперь решение

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

Так как $C_i^{(0)}$ удовлетворяют системе (34), то ясно, что решение (36) имеет нулевые начальные значения в точке $x = x_0$:

$$y_1 = 0, \ y_2 = 0, \ \ldots, \ y_n = 0 \ \text{при} \ x = x_0. \tag{37}$$

Но тогда, в силу теоремы единственности, решение (36) является нулевым, $y_1 \equiv 0,\ y_2 \equiv 0,\ \ldots,\ y_n = 0$ [127], так что имеем тождества:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{38}$$

где не все $C_i^{(0)}$ равны нулю, т. е. решения (33) линейно зависимы в интервале (a, b), вопреки предположению. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы предыдущего пункта следует, что *для того, чтобы n решений системы* (2) *были линейно независимы в интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался в нуль ни в одной точке этого интервала.*

Однако для установления линейной независимости n решений системы (2) достаточно убедиться, что $W(x)$ отличен от нуля хоть в одной точке интервала (a, b). Это вытекает из следующих двух замечательных свойств вронскиана n решений системы (2).

1. *Если $W(x)$ обращается в нуль хоть в одной точке интервала (a, b), т. е. интервала непрерывности коэффициентов системы* (2), *то $W(x)$ равен нулю во всех точках этого интервала.*

2. *Если $W(x)$ не равен нулю хоть в одной точке интервала (a, b), то он не обращается в нуль ни в одной точке интервала (a, b).*

Доказательство этих свойств аналогично доказательству соответствующих свойств вронскиана решений однородного линейного уравнения n-го порядка* .

Таким образом, *для линейной независимости n решений системы* (2) *в интервале (a, b)*** *необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля хоть в одной точке этого интервала.*

202. Формула Остроградского — Лиувилля — Якоби. Указанные выше свойства вронскиана решений однородной системы (2) легко получаются из следующей замечательной формулы, выражающей (с точностью до постоянного множителя) вронскиан решений через диагональные коэффициенты системы:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} [p_{11}(x) + p_{22}(x) + \ldots + p_{nn}(x)]\, dx}, \tag{39}$$

где $x = x_0$ есть любая точка из интервала (a, b)*** .

Для доказательства этой формулы вычислим производную от вронскиана, дифференцируя по столбцам. Так как в этом

---

* См. п. 162.

** Где (a, b) — интервал непрерывности коэффициентов системы (2).

*** См. п. 163.

случае производная от определителя n-го порядка равна сумме n определителей, получающихся из него поочередной заменой элементов 1-го, 2-го, ..., n-го столбца их производными *, то:

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k-1} & y'_{1k} & y_{1k+1} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k-1} & y'_{2k} & y_{2k+1} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk-1} & y'_{nk} & y_{nk+1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

Заменяя справа производные $y'_{1k}, y'_{2k}, \ldots, y'_{nk}$ их значениями из тождеств (17) при $m=n$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k-1} & \sum\limits_{l=1}^{n} p_{kl}y_{1l} & y_{1k+1} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k-1} & \sum\limits_{l=1}^{n} p_{kl}y_{2l} & y_{2k+1} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk-1} & \sum\limits_{l=1}^{n} p_{kl}y_{nl} & y_{nk+1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (41)$$

Разложим определитель, стоящий под знаком суммы, на сумму n определителей. Все получающиеся определители будут равны нулю, кроме определителя, соответствующего $l=k$ (ибо каждый из них будет иметь два пропорциональных столбца). Определитель же, соответствующий $l=k$, равен $p_{kk}(x)\ W(x)$. Поэтому

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x)\,W(x), \qquad (42)$$

откуда и следует формула (39).

203. Понятие о фундаментальной системе решений. Совокупность n решений однородной системы (2), определенных и линейно независимых в интервале (a, b), называется *фундаментальной системой решений* в этом интервале. Из п. **201** следует, что *система n решений будет фундаментальной системой решений в интервале (a, b) тогда и только тогда, когда вронскиан этих решений отличен от нуля хоть в одной точке интервала (a, b)*.

204. Теорема о существовании фундаментальной системы решений. *Если коэффициенты системы* (2) *непрерывны в интервале (a, b), то существует фундаментальная система решений, определенных и непрерывных в этом интервале.*

---

* См. сноску на стр. 372.

Действительно, возьмем точку $x=x_0$ из (a, b) и построим методом Пикара n решений

$$\left.\begin{matrix} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn} \end{matrix}\right\} \tag{43}$$

со следующими начальными значениями в этой точке:

$$\left.\begin{matrix} y_{11}=1, \ y_{12}=0, \ \ldots, \ y_{1n}=0 \ \text{ при } \ x=x_0, \\ y_{21}=0, \ y_{22}=1, \ \ldots, \ y_{2n}=0 \ \text{ при } \ x=x_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}=0, \ y_{n2}=0, \ \ldots, \ y_{nn}=1 \ \text{ при } \ x=x_0. \end{matrix}\right\} \tag{44}$$

Вронскиан решений (43) в точке $x=x_0$ равен единице. Следовательно, система решений (43) — фундаментальная.

Так как при доказательстве теоремы вместо чисел 1 и 0 можно взять любые n^2 чисел, определитель из которых не нуль, то ясно, что *существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений.*

Построенная фундаментальная система (43) называется *нормированной* в точке $x=x_0$. Из теоремы существования и единственности следует, что *для каждой точки* $x=x_0$ *из* (a, b) *существует одна и только одна нормированная в этой точке фундаментальная система решений.*

Возникает вопрос: существует ли связь между различными фундаментальными системами, в частности, можно ли любую фундаментальную систему выразить через нормированную. Ответ на этот вопрос мы даем в п. **225**.

Замечание. *Если коэффициенты системы* (2) *голоморфны в области* $|x-x_0|<\rho$, $(0<\rho\leqslant+\infty)$, *то*, применяя теорему Коши п. **148**, так же, как и выше, убеждаемся, что *существует фундаментальная система решений, голоморфных по крайней мере в этой области.*

205. Построение общего решения. Так же, как и в случае однородного линейного уравнения n-го порядка, знание фундаментальной системы решений дает возможность построить общее решение системы (2).

Основная теорема. *Если*

$$\left.\begin{matrix} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn} \end{matrix}\right\} \tag{45}$$

есть фундаментальная система решений однородной линейной системы (2) *в интервале* (a, b), *то формулы*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1}, \\ y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn}, \end{array}\right\} \tag{46}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные, или, короче,*

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{46'}$$

дают общее решение системы (2) *в области*

$$a < x < b, \ |y_k| < +\infty \ (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{47}$$

т. е. во всей области задания системы (2).

Действительно система (46) разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в области (47), ибо (46) есть линейная система, причем ее определитель, будучи равным $W(x)$, отличен от нуля, так как (45) есть фундаментальная система решений.

Кроме того, по второму свойству решений однородной линейной системы совокупность функций (46) является решением системы (2) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Поэтому, согласно определению общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений, данному в п. **107**, совокупность функций (46) является общим решением системы (2) в области (47).

Формула (46) содержит в себе все решения системы (2).

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \ y_2 = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n = y_n^{(0)} \ \text{при} \ x = x_0, \tag{48}$$

где $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — любая точка области (47), нужно подставить начальные данные в систему (46). Будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(0)} = C_1 (y_{11})_0 + C_2 (y_{21})_0 + \ldots + C_n (y_{n1})_0, \\ y_2^{(0)} = C_1 (y_{12})_0 + C_2 (y_{22})_0 + \ldots + C_n (y_{n2})_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(0)} = C_1 (y_{1n})_0 + C_2 (y_{2n})_0 + \ldots + C_n (y_{nn})_0. \end{array}\right\} \tag{49}$$

Разрешая эту систему относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (что возможно, ибо определитель ее, будучи равным $W(x_0)$, отличен от нуля), получим:

$$C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n = C_n^{(0)}. \tag{50}$$

Подставляя эти значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в общее решение (46), найдем:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1^{(0)} y_{11} + C_2^{(0)} y_{21} + \ldots + C_n^{(0)} y_{n1}, \\ y_2 &= C_1^{(0)} y_{12} + C_2^{(0)} y_{22} + \ldots + C_n^{(0)} y_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1^{(0)} y_{1n} + C_2^{(0)} y_{2n} + \ldots + C_n^{(0)} y_{nn}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Это и есть искомое решение. Других решений с теми же начальными условиями (48) нет.

Из формулы (51) мы видим, что всякое частное решение однородной линейной системы (2) (а следовательно, и вообще всякое решение этой системы) представляет собою линейную комбинацию с постоянными коэффициентами из частных решений, составляющих фундаментальную систему решений.

Постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определяемые из системы (49), являются **линейными** функциями от начальных значений $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эти функции будут наиболее простыми, если фундаментальная система решений (45) **нормирована** в точке $x = x_0$ (в которой заданы начальные значения решения).

В самом деле, в этом случае система (49) принимает вид:

$$y_k^{(0)} = C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Поэтому, пользуясь формулой общего решения (46′), получаем, что решение с начальными условиями (48) дается формулой:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(0)} y_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Эту формулу можно рассматривать и как **общее решение** системы (2) **в форме Коши**, если считать начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ **произвольными**.

Доказанная теорема и дает ответ на вопрос, поставленный в конце п. 198. *Чтобы линейная комбинация n решений однородной системы* (2) *с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ давала ее общее решение, необходимо и достаточно, чтобы эти решения были линейно независимы, т. е. чтобы они составляли фундаментальную систему решений.*

206. Число линейно независимых решений однородной линейной системы n уравнений. Первые интегралы. *Однородная система* (2) *не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.*

Действительно, пусть мы имеем $n+1$ частных решений:

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1). \tag{54}$$

Рассмотрим первые n решений. Если они линейно зависимы, то и все наши $n+1$ решений линейно зависимы. Если же решения $y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ линейно независимы, то, согласно основной теореме, имеем:

$$y_{n+1,\ k}=\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{55}$$

или

$$C_1^{(0)} y_{1k}+C_2^{(0)} y_{2k}+\ldots+C_n^{(0)} y_{nk}+C_{n+1}^{(0)} y_{n+1,\ k}=0$$
$$(C_{n+1}^{(0)}=-1,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{56}$$

так что $n+1$ частных решений (54) снова оказываются линейно зависимыми.

Разрешая систему (46′),

$$y_k=\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

относительно C_i, мы получим n первых интегралов однородной системы (2) в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{W_{ki}(x)}{W(x)}=C_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{57}$$

где $W_{ki}(x)$ — алгебраическое дополнение элемента $y_{ki}(x)$ вронскиана $W(x)$.

Заметим, что все n интегралов

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{58}$$

являются линейными функциями от искомых функций $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$.

207. Понятие о сопряженной (присоединенной) системе. Система

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx}&=-p_{11}(x) z_1-p_{21}(x) z_2-\ldots-p_{n1}(x) z_n,\\
\frac{dz_2}{dx}&=-p_{12}(x) z_1-p_{22}(x) z_2-\ldots-p_{n2}(x) z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_n}{dx}&=-p_{1n}(x) z_1-p_{2n}(x) z_2-\ldots-p_{nn}(x) z_n,
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

матрица коэффициентов которой

$$\left\| \begin{matrix} -p_{11}(x) & -p_{21}(x) & \dots & -p_{n1}(x) \\ -p_{12}(x) & -p_{22}(x) & \dots & -p_{n2}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{1n}(x) & -p_{2n}(x) & \dots & -p_{nn}(x) \end{matrix} \right\| \tag{60}$$

получается из матрицы коэффициентов системы (2),

$$\left\| \begin{matrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{matrix} \right\| \tag{61}$$

транспонированием (т. е. заменой строк столбцами) и переменой знака, называется *сопряженной* с системой (2) или *присоединенной* к системе (2). Ясно, что, обратно, система (2) является сопряженной с системой (59), так что системы (2) и (59) взаимно сопряжены.

Покажем, что задача интегрирования системы (2) равносильна задаче интегрирования сопряженной с нею системы (59).

С этой целью убедимся сначала в том, что два любые частные решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ и $z_1, z_2, \dots, z_n$ систем (2) и (59) связаны соотношением

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n = C, \tag{62}$$

где C — постоянная. В самом деле, вычисляя производную по x от левой части, имеем:

$$\frac{d}{dx}(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{dy_k}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{dz_k}{dx} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l - \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x)\, z_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l - \sum_{l=1}^{n} y_l \sum_{k=1}^{n} p_{kl}(x)\, z_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l - \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l = 0,$$

откуда и вытекает соотношение (62).

Таким образом, *знание одного частного решения* $z_1, z_2, \dots, z_n$ *системы* (59) *дает возможность получать без интегрирования один первый интеграл* (62) *системы* (2), *причем его левая часть есть линейная функция от искомых функций* $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Если известна фундаментальная система решений системы (59)

$$\left.\begin{array}{l} z_{11}(x),\ z_{12}(x),\ \ldots,\ z_{1n}(x), \\ z_{21}(x),\ z_{22}(x),\ \ldots,\ z_{2n}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n1}(x),\ z_{n2}(x),\ \ldots,\ z_{nn}(x), \end{array}\right\} \qquad (63)$$

то, подставляя поочередно эти решения в соотношение (62), *мы получим n независимых первых интегралов системы* (2):

$$\left.\begin{array}{l} z_{11}y_1 + z_{12}y_2 + \ldots + z_{1n}y_n = C_1, \\ z_{21}y_1 + z_{22}y_2 + \ldots + z_{2n}y_n = C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n1}y_1 + z_{n2}y_2 + \ldots + z_{nn}y_n = C_n, \end{array}\right\} \qquad (64)$$

т. е. имеем общий интеграл системы (2).

Система (2) называется *самосопряженной,* если она совпадает с сопряженной с нею системой. Коэффициенты самосопряженной системы должны удовлетворять условию:

$$p_{kl} = -p_{lk} \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (65)$$

Следовательно, диагональные коэффициенты самосопряженной системы равны нулю. Из соотношения (62) следует, что *всякие два частных решения $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ и $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$ самосопряженной системы подчинены условию*

$$y_{11}y_{21} + y_{12}y_{22} + \ldots + y_{1n}y_{2n} = \mathrm{const}. \qquad (66$$

В частности, *для всякого частного решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ самосопряженной системы имеем:*

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \mathrm{const}. \qquad (67)$$

Отсюда следует, что *всякое частное решение самосопряженной системы ограничено во всем интервале* (a, b) *непрерывности коэффициентов,* т. е.

$$|y_k(x)| \leq M \text{ при } a < x < b \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (68)$$

где M — положительная постоянная.

Кроме того, отсюда следует, что *порядок самосопряженной системы всегда можно понизить на единицу,* ибо она имеет первый интеграл (67).

В частности, самосопряженная система двух уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = p(x)z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -p(x)y \end{array}\right\} \qquad (69)$$

допускает первый интеграл $y^2+z^2=C_1^2$ и всегда интегрируется в квадратурах.

Можно доказать, что интегрирование самосопряженной системы трех уравнений приводится к интегрированию уравнения Риккати, а интегрирование самосопряженной системы четырех уравнений приводится к интегрированию двух уравнений Риккати* .

208. Построение однородной линейной системы уравнений, имеющей заданную фундаментальную систему решений. Построим однородную линейную систему n уравнений:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{70}$$

имеющую фундаментальную систему решений:

$$y_{i1}\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in}\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n)\ ^{**}. \tag{71}$$

Подставляя поочередно решения (71) в k-тое уравнение системы (70) $(k=1, 2, \ldots, n)$, получим:

$$\frac{dy_{ik}}{dx}=\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_{il}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{72}$$

Отсюда определятся все $p_{kl}(x)$ $(l=1, 2, \ldots, n)$ и притом единственным образом (почему?). Таким образом, фундаментальной системе решений (71) соответствует одна однородная линейная система вида (70). Эту систему можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_k}{dx} & \frac{dy_{1k}}{dx} & \frac{dy_{2k}}{dx} & \ldots & \frac{dy_{nk}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & \ldots & y_{n1} \\ y_2 & y_{12} & y_{22} & \ldots & y_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}=0\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{73}$$

(почему?)

Пример. Построить однородную линейную систему двух уравнений, имеющую следующую фундаментальную систему решений:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1+x, & z_1&=x, \\ y_2&=2, & z_2&=x. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Так как $W(x)=x(x-1)$, то мы ограничимся интервалом $(0,\ 1)$.

---

* См.: Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, 1936, стр. 430—431.

** Ср. п. 168.

Искомой системой будет:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 & 0 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & 1 & 1 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0. \tag{75}$$

Переписывая ее в нормальной форме, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x-1}\, y - \frac{2}{x(x-1)} z, \\ \frac{dz}{dx} &= \qquad\qquad \frac{1}{x}\, z. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Точки $x=0$ и $x=1$, в которых $W(x)$ обращается в нуль, являются *особыми* точками системы.

§ 2. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

209. Структура общего решения неоднородной системы. Рассмотрим теперь неоднородную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Предположим, что нам известно некоторое частное решение этой системы:

$$y_1 = y_1^{(1)}, \; y_2 = y_2^{(1)}, \; \ldots, \; y_n = y_n^{(1)}, \tag{2}$$

так что мы имеем тождества

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l^{(1)} + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Введем новые неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$ по формулам

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Подставляя функции (4) в неоднородную систему (1), получим:

$$\left.\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l^{(1)} + \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, z_l + f_k(x)\right\} \tag{5}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда, в силу тождеств (3), получаем для функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$ следующую *однородную* систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, z_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Эта система называется *однородной системой, соответствующей неоднородной системе* (1).

Общее решение однородной системы (6) дается формулой

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

где $\{z_{ik}\}$ — некоторая фундаментальная система решений этой однородной системы.

Подставляя (7) в (4), получаем:

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Все решения системы (1) содержатся в формуле (8). *Эта формула представляет собою общее решение системы* (1) *в области*

$$a < x < b, \quad |y_k| < +\infty \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{9}$$

т. е. во всей области задания системы (1) (почему?)

Таким образом, *для нахождения общего решения неоднородной системы* (1) *достаточно найти одно какое-либо частное решение этой системы и прибавить к нему общее решение соответствующей однородной системы* (6).

210. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Общий прием нахождения частного решения, а вместе с тем и построения общего решения неоднородной системы, в случае, когда мы умеем проинтегрировать соответствующую однородную систему, дается следующей теоремой.

Теорема*. *Если известна фундаментальная система решений однородной системы* (6), *то общее решение неоднородной системы* (1) *может быть найдено при помощи квадратур.*

Для доказательства этой теоремы применим метод вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы (1) в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, z_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

где $\{z_{ik}\}$ — фундаментальная система решений однородной системы (6), а $C_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x. Выберем эти функции так, чтобы формула (10) давала решение системы (1).

* Ср. п. **171**.

Подставляя (10) в (1), получаем:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, z_{ik}' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, z_{il} + f_k(x) \\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{array}\right\} \quad (11)$$

или

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, z_{ik}' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, z_{il} + f_k(x) \\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).\end{array}\right\} \quad (12)$$

Переписав эти равенства в виде

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \left[z_{ik}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, z_{il}\right] = f_k(x) \\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{array}\right\} \quad (13)$$

и приняв во внимание, что $\{z_{ik}\}$ — фундаментальная система решений однородной системы (6), мы приходим к следующей системе n уравнений для определения C_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_{ik} = f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (14)$$

Так как определитель этой системы, будучи равным $W(x)$, отличен от нуля во всем интервале $(a,\ b)$, то разрешая ее относительно $C_i'(x)$, находим:

$$C_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots n), \qquad (15)$$

где $W_{ki}(x)$ есть алгебраическое дополнение элемента z_{ki} вронскиана $W(x)$. Интегрируя (15), находим:

$$C_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)}\, dx + C_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)^*. \qquad (16)$$

Подставляя эти значения $C_i(x)$ в формулу (10), получаем:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \sum_{s=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_s(x) \frac{W_{si}(x)}{W(x)}\, dx + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (17)$$

---

* Мы взяли определенный интеграл с переменным верхним пределом. Можно было брать неопределенный интеграл.

Полагая здесь $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, получаем решение:

$$y_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \sum_{s=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_s(x) \frac{W_{si}(x)}{W(x)} dx \quad (k = 1, 2, \ldots, n)^*, \tag{18}$$

так что (17) можно записать в виде (8) и, следовательно, решение, определяемое формулой (17), является *общим решением* неоднородной системы (1) в области (9). Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что проблема интегрирования неоднородной линейной системы сводится к проблеме построения фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Поэтому особый интерес представляют такие линейные системы уравнений, у которых фундаментальная система решений соответствующей однородной системы находится в *элементарных* функциях. К числу таких систем относятся прежде всего системы с постоянными коэффициентами.

---

* Заметим, что это решение удовлетворяет *нулевым* начальным условиям в точке $x = x_0$.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. МЕТОД ЭЙЛЕРА

211. Предварительные замечания. В этой главе мы будем изучать линейные системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l + f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1'}$$

где коэффициенты a_{kl} $(k,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ — постоянные вещественные числа, а $f_k(x)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — функции от x, непрерывные в интервале (a, b).

Применяя общую теорию линейных систем уравнений, изложенную в предыдущей главе, мы покажем, что *система* (1) *всегда может быть проинтегрирована в конечном виде, т. е. либо в элементарных функциях, либо в квадратурах.*

Так как интегрирование неоднородной линейной системы приводится к интегрированию соответствующей однородной системы, то рассмотрим сначала вопрос о построении общего решения однородной системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В силу теоремы п. **205,** для построения общего решения системы (2) достаточно построить хоть одну фундаментальную систему решений.

Применяя теорему п. **204,** мы видим, что существует фундаментальная система решений, определенных и непрерывных в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Более того, согласно замечанию п. **204,** существует фундаментальная система решений, голоморфных в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Мы покажем, что *фундаментальная система решений может быть построена из элементарных функций, голоморфных в интервале* $(-\infty, +\infty)$.

212. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы в случае различных корней характеристического уравнения. По аналогии с однородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами будем искать частное решение системы (2) в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{3}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и λ — некоторые постоянные числа, причем числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не равны нулю одновременно, ибо в противном случае мы получили бы очевидное нулевое решение, которое не может входить в состав фундаментальной системы и, следовательно, не может быть использовано для построения общего решения.

Обратим особое внимание на то, что число λ мы берем одно и то же для всех функций, составляющих решение.

Подставляя функции (3) в систему (2), сокращая на $e^{\lambda x}$ и перенося все члены направо, получим для определения чисел γ_k следующую систему:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0,\\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Нас интересует ненулевое решение этой системы. Такое решение существует лишь при условии, что определитель системы равен нулю, т. е. при условии

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением* системы (2), его корни — *характеристическими числами,* а определитель $\Delta(\lambda)$ — *характеристическим определителем.*

Рассмотрим сначала случай, когда все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны. В этом случае имеем: $\Delta(\lambda_i) = 0$, но

$\Delta'(\lambda_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вследствие этого ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda_i \end{matrix} \right\|, \tag{6}$$

составленной из коэффициентов системы

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n &= 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\gamma_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которая получается из системы (4) после замены в ней λ на λ_i- равен $n - 1$.

Действительно, вычисляя $\Delta'(\lambda)$, имеем:

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & -1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & -1 \end{vmatrix} = -\sum_{l=1}^{n} \Delta_{ll}(\lambda), \tag{8}$$

где $\Delta_{ll}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ll} - \lambda$ определителя $\Delta(\lambda)$. Так как $\Delta'(\lambda_i) \neq 0$, то из (8) видим, что хоть один из определителей $(n-1)$-го порядка, именно один из $\Delta_{ll}(\lambda_i)$, отличен от нуля, так что ранг рассматриваемой матрицы равен $n - 1$.

Поэтому одно из уравнений системы (7) есть следствие остальных и эта система имеет ненулевое решение, определенное с точностью до произвольного множителя пропорциональности A_i:

$$\gamma_{i1} = A_i m_{i1}, \ \gamma_{i2} = A_i m_{i2}, \ \ldots, \ \gamma_{in} = A_i m_{in} \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Например, в качестве γ_{ik} можно взять алгебраические дополнения элементов любой строки определителя $\Delta(\lambda_i)$, если не все они равны нулю. В самом деле, так как сумма произведений элементов какой-либо строки определителя $\Delta(\lambda_i)$ на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, а сумма произведений элементов строки на их алгебраические дополнения равна самому определителю $\Delta(\lambda_i)$, т. е. снова равна нулю, то ясно, что, заменив в системе (7) неизвестные γ_k взятыми алгебраическими дополнениями, мы получим тождества.

Фиксируя в формулах (9) множитель A_i, мы получим определенное решение системы (7).

Подставляя теперь в (3) вместо λ последовательно характеристические числа λ_i, а вместо $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — соответствующие им решения системы (7), определяемые формулами (9) при фиксированных множителях A_i, получим n решений:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11} = \gamma_{11} e^{\lambda_1 x},\ y_{12} = \gamma_{12} e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_{1n} = \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x}; \\ y_{21} = \gamma_{21} e^{\lambda_2 x},\ y_{22} = \gamma_{22} e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_{2n} = \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1} = \gamma_{n1} e^{\lambda_n x},\ y_{n2} = \gamma_{n2} e^{\lambda_n x},\ \ldots,\ y_{nn} = \gamma_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Эти решения линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$*.

Если при этом все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественны, то все решения (10) тоже будут вещественными.

Таким образом, *в случае различных вещественных корней характеристического уравнения система* (2) *имеет n вещественных линейно независимых частных решений вида* (10), *так что последние образуют ф у н д а м е н т а л ь н у ю систему решений.*

Поэтому, в силу теоремы п. **205**, формулы

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1\gamma_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{21} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{n1} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1\gamma_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{n2} e^{\lambda_n x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_1\gamma_{1n} e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{2n} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{array}\right\} \tag{11}$$

дают общее решение системы (2) в области

$$|x| < +\infty,\ |y_1| < +\infty,\ |y_2| < +\infty,\ \ldots,\ |y_n| < +\infty. \tag{12}$$

Если характеристические числа различные, но среди них есть комплексные, то последние входят сопряженными парами (почему?). Пусть $a+ib$ и $a-ib$ — простые корни характеристического уравнения. Корню $a+ib$ соответствует согласно формуле (3) решение

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x},\ y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x},\ \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x}. \tag{13}$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — комплексные числа. Полагая

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21},\ \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

получаем решение:

$$\begin{array}{c} y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21}) e^{(a+ib)x},\ y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22}) e^{(a+ib)x}, \\ \ldots,\ y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n}) e^{(a+ib)x}. \end{array} \tag{14}$$

Это решение комплексное. Отделяя в нем вещественные и мнимые части, мы получим, согласно п. **198**, два вещественных

---

* См. п. **199**, пример 2.

решения:

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= e^{ax}(\gamma_{11}\cos bx - \gamma_{21}\sin bx), & y_{12} &= e^{ax}(\gamma_{12}\cos bx - \gamma_{22}\sin bx), \\ & \ldots, & y_{1n} &= e^{ax}(\gamma_{1n}\cos bx - \gamma_{2n}\sin bx); \\ y_{21} &= e^{ax}(\gamma_{11}\sin bx + \gamma_{21}\cos bx), & y_{22} &= e^{ax}(\gamma_{12}\sin bx + \gamma_{22}\cos bx), \\ & \ldots, & y_{2n} &= e^{ax}(\gamma_{1n}\sin bx + \gamma_{2n}\cos bx). \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Эти решения, очевидно, линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что сопряженный корень $a-ib$ не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, *если все характеристические числа — различные и вещественные, то мы получаем соответствующие им вещественные линейно независимые частные решения в виде* (10). *Если же все характеристические числа — различные, но среди них есть комплексные, то последние обязательно входят сопряженными парами и каждой паре таких характеристических чисел соответствуют два линейно независимых частных решения вида* (15). *Всего мы получим n вещественных частных решений. Все эти решения линейно независимы в интервале* $(-\infty, +\infty)$.

В самом деле, предположим обратное. Тогда, написав соответствующую систему соотношений между этими решениями и перейдя в ней от тригонометрических функций к показательным, мы получили бы, что системы функций вида (10), где λ_1, λ_2, ..., λ_n — различные числа, оказались бы линейно зависимыми, что противоречит утверждению примера **2, п. 199.**

Общее решение системы (2) *в области* (12) *представляет собою линейные комбинации построенных n вещественных линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами.*

Пример 1. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Решая характеристическое **уравнение**

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0, \qquad (17)$$

находим: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$, так что характеристические числа различные и вещественные.

Составляем систему для определения чисел γ_1 и γ_2, соответствующих характеристическому числу $\lambda_1 = 1$. Матрица коэффициентов этой системы получается из матрицы

$$\begin{Vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{Vmatrix} \qquad (18)$$

заменой λ на $\lambda_1=1$, так что искомая система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} 4\gamma_1+4\gamma_2=0,\\ 4\gamma_1+4\gamma_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Здесь, как и следовало ожидать, второе уравнение является следствием первого (оно даже совпадает с первым уравнением) и его можно было и не выписывать. Полагая $\gamma_1=1$, находим $\gamma_2=-1$.

Таким образом, характеристическому числу $\lambda_1=1$ соответствует решение:

$$y_1=e^x,\ z_1=-e^x. \qquad (20)$$

Аналогично, решая систему, соответствующую характеристическому числу $\lambda_2=9$:

$$\left.\begin{aligned} -4\gamma_1+4\gamma_2=0,\\ 4\gamma_1-4\gamma_2=0, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

находим: $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$, так что этому характеристическому числу соответствует решение:

$$y_2=e^{9x},\ z_2=e^{9x}. \qquad (22)$$

Мы получили фундаментальную систему решений:

$$\left.\begin{aligned} y_1=e^x,\quad z_1=-e^x,\\ y_2=e^{9x},\quad z_2=e^{9x}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Беря линейную комбинацию (по столбцам!), получаем общее решение:

$$\left.\begin{aligned} y=C_1e^x+C_2e^{9x},\\ z=-C_1e^x+C_2e^{9x}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=2y-z,\\ \frac{dz}{dx}=y+2z. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1\\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2-4\lambda+5=0 \qquad (26)$$

имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_1=2+i$, $\lambda_2=2-i$. Найдем решение, соответствующее λ_1. Это решение имеет вид $y=\gamma_1e^{(2+i)x}$, $z=\gamma_2e^{(2+i)x}$.

Числа γ_1 и γ_2 ищем из системы:

$$\left.\begin{aligned} -i\gamma_1-\gamma_2=0,\\ \gamma_1-i\gamma_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Полагая $\gamma_1=1$, находим $\gamma_2=-i$, так что искомым решением будет

$$y=e^{(2+i)x},\quad z=-ie^{(2+i)x}. \qquad (28)$$

Это решение комплексное. Отделяя в нем вещественные и мнимые части, получим два вещественных решения:

$$\left.\begin{aligned} y_1=e^{2x}\cos x,\ z_1=e^{2x}\sin x,\\ y_2=e^{2x}\sin x,\ z_2=-e^{2x}\cos x. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Эти решения составляют фундаментальную систему решений, так что общим решением будет

$$\left.\begin{aligned} y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x),\\ z=e^{2x}(C_1\sin x-C_2\cos x). \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Пример 3. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

имеет различные и притом вещественные корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, так что фундаментальная система решений имеет вид (10).

Найдем сначала частное решение вида

$$y_{11} = \gamma_{11} e^{2x}, \quad y_{12} = \gamma_{12} e^{2x}, \quad y_{13} = \gamma_{13} e^{2x}, \tag{33}$$

соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. В качестве чисел γ_{11}, $\gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}$ можно взять алгебраические дополнения элементов первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

который получается из характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ заменой λ на $\lambda_1 = 2$. Получаем

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \gamma_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \gamma_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

или (деля на 2)

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{13} = -1. \tag{34}$$

Подставляя эти значения γ_{1k} в (33), получим:

$$y_{11} = e^{2x}, \quad y_{12} = 0, \quad y_{13} = -e^{2x}. \tag{35}$$

Аналогично найдем, что в качестве чисел γ_{2k}, γ_{3k}, соответствующих характеристическим числам $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, можно взять $\gamma_{21} = 1$, $\gamma_{22} = 1$, $\gamma_{23} = 1$; $\gamma_{31} = 1$, $\gamma_{32} = -2$, $\gamma_{33} = 1$.

Фундаментальной системой решений будет:

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= e^{2x}, & y_{12} &= 0, & y_{13} &= -e^{2x}, \\ y_{21} &= e^{3x}, & y_{22} &= e^{3x}, & y_{23} &= e^{3x}, \\ y_{31} &= e^{6x}, & y_{32} &= -2e^{6x}, & y_{33} &= e^{6x} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

так что общее решение имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 &= C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

213. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то изложенный выше способ построения фундаментальной системы решений, очевидно, не применим.

Однако и в этом случае удается построить фундаментальную систему решений в элементарных функциях.

Заметим, прежде всего, что если λ_1 есть простое характеристическое число, то независимо от того, будут среди остальных характеристических чисел встречаться кратные или нет, ему всегда соответствует одно частное решение вида:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda_1 x}, \tag{38}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — некоторые постоянные числа, определяемые с точностью до постоянного множителя.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти частные решения, соответствующие кратному корню.

При этом, так же как и для линейного однородного уравнения n-го порядка, оказывается, что одному характеристическому числу кратности k соответствует k линейно независимых частных решений.

Теорема* . *Если λ_1 есть характеристическое число кратности k, то ему соответствует решение вида*

$$y_1 = P_1(x) e^{\lambda_1 x},\ y_2 = P_2(x) e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = P_n(x) e^{\lambda_1 x}, \tag{39}$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ суть полиномы от x степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k произвольных коэффициентов, так что среди всех коэффициентов всех этих полиномов k коэффициентов являются произвольными, а все остальные выражаются через них.

В частности может случиться, что все эти полиномы вырождаются в постоянные числа. В таком случае k-кратному характеристическому числу λ_1 будет соответствовать решение вида

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda_1 x}. \tag{40}$$

Однако здесь k из коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ являются произвольными, в то время как для простого характеристического числа произвольным является только один из них.

Доказательство этой теоремы мы дадим в конце п. 228.

Практически при *нахождении решения, соответствующего характеристическому числу λ_1, нужно искать решение в виде* (39), *считая $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ полиномами* $(k-1)$*-й степени с неопределенными коэффициентами и, подставляя* (39) *в* (2), *выразить все коэффициенты через k из них, которые остаются произвольными.*

Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим k линейно независимых решений, соответствующих характе-

---

* См.: Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II. 1936, стр. 420—422.

ристическому числу λ_1. Все эти частные решения будут составлены из произведений показательной функции $e^{\lambda_1 x}$ на полиномы от x, степени которых не превышают $k-1$. Если же полиномы в формулах (39) вырождаются в постоянные числа, то мы получим k линейно независимых частных решений такого же вида, как и в случае простого корня характеристического уравнения.

Если λ_1 — вещественное характеристическое число, то построенные выше k линейно независимых решений будут вещественными.

Если же система (2) имеет комплексное характеристическое число $a+ib$ кратности k, то оно имеет сопряженное характеристическое число $a-ib$ той же кратности.

Построив k линейно независимых комплексных решений, соответствующих характеристическому числу $a+ib$, и отделив в них вещественные и мнимые части, мы получим $2k$ вещественных линейно независимых частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному характеристическому числу соответствует одно частное решение, каждой паре простых сопряженных комплексных характеристических чисел соответствует два вещественных линейно независимых решения, вещественному характеристическому числу кратности k соответствует k вещественных линейно независимых частных решений, а каждой паре сопряженных комплексных характеристических чисел кратности k соответствует $2k$ вещественных линейно независимых частных решений. Всего получается n вещественных решений. Все эти решения линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, *так что они образуют фундаментальную систему решений. Взяв линейные комбинации решений этой фундаментальной системы по столбцам с одними и теми же произвольными постоянными* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *мы получим общее решение системы* (2) *в области* (12).

Заметим, однако, что мы не можем на основании указанной теоремы выяснить до конца структуру фундаментальной системы решений до тех пор, пока не построим ее фактически.

Мы выясним эту структуру в следующей главе, где будет дан другой способ построения фундаментальной системы, причем в отличие от настоящего пункта там строится сразу вся фундаментальная система.

Указанный выше вид фундаментальной системы решений даст возможность сделать некоторые заключения об устойчивости нулевого решения однородной системы (2)*.

214. Теорема об асимптотической устойчивости (в смысле Ляпунова) нулевого решения однородной линейной системы с

* Относительно устойчивости нулевого решения однородной линейной системы двух уравнений см. п. **141**.

постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где a_{kl} — постоянные вещественные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные функции от времени t.

Теорема. *Если все характеристические числа системы* (41) *отрицательные или имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение*

$$x_1 \equiv 0, \ x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n \equiv 0 \tag{42}$$

асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при $t \to +\infty$, *причем начальные возмущения можно брать любыми.*

Это утверждение непосредственно следует из вида фундаментальной системы решений и соответствующего ей общего решения системы (41), установленного для общего случая характеристических чисел этой системы в п. **213.**

215. Теорема о неустойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами. *Если хоть одно из характеристических чисел системы* (41) *положительно или имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение* (42) *неустойчиво в смысле Ляпунова при* $t \to +\infty$

Эта теорема также является следствием утверждений п. **213.**

216. Приведение однородной линейной системы к системе с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной*. Рассмотрим систему:

$$\frac{dy_k}{dx} = p_{k1}(x)\,y_1 + p_{k2}(x)\,y_2 + \ldots + p_{kn}(x)\,y_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Введем вместо x новую независимую переменную t по формуле

$$t = \psi(x). \tag{44}$$

Тогда получим систему:

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{1}{\psi'(x)}\left[p_{k1}(x)\,y_1 + p_{k2}(x)\,y_2 + \ldots + p_{kn}(x)\,y_n\right]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{45}$$

Предположим, что коэффициенты этой системы постоянны, т. е.

$$\frac{p_{kl}(x)}{\psi'(x)} = a_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{46}$$

---

* См. сноску на стр. 419.

Тогда $p_{kl}(x)$ имеют вид

$$p_{kl}(x) = a_{kl}\psi'(x), \tag{47}$$

т. е. $p_{kl}(x)$ представляют собой произведения постоянных чисел на одну и ту же функцию от x.

Обратно, если коэффициенты $p_{kl}(x)$ обладают этим свойством, т. е. если

$$p_{kl}(x) = a_{kl}\cdot\varphi(x), \tag{48}$$

то, положив

$$t = \psi(x) = \int \varphi(x)\,dx, \tag{49}$$

мы получим систему с постоянными коэффициентами a_{kl}.

Пример 1. Пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ x\frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_3, \\ x\frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Здесь условие (48) выполнено, причем $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Поэтому подстановка

$$t = \int \varphi(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x \; (x > 0) \tag{51}$$

или

$$x = e^t \tag{52}$$

приводит данную систему к системе с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + y_2. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Интегрируя эту систему, получаем* :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y_2 &= C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ y_3 &= -(C_1 + C_3)\,e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Поэтому общим решением системы (50) будет:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{C_1}{x} + C_2x^2, \\ y_2 &= C_2x^2 + \frac{C_3}{x}, \\ y_3 &= -\frac{C_1 + C_3}{x} + C_2x^2. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

---

* См. п. 218, пример.

Отсюда видно, что решения системы (50) могут иметь особенность только в точке $x=0$, которая является единственной особой точкой этой системы. (В точке $x=0$ не выполнены условия теоремы существования). Наряду с такими решениями существует целое семейство решений $y_1=Cx^2$, $y_2=Cx^2$, $y_3=Cx^2$, голоморфных в окрестности особой точки $x=0$. Заметим, однако, что среди них (и вообще) нет решений, в которых функции y_1, y_2 и y_3 стремились бы к пределам, не равным одновременно нулю, когда x стремится к особой точке $x=0$.

217. Интегрирование неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных. Рассмотрим теперь неоднородную линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}y_l+f_k(x)\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{56}$$

Так как соответствующая однородная система всегда интегрируется в элементарных функциях, то, применяя метод вариации произвольных постоянных, *мы всегда можем получить общее решение неоднородной системы* (56), *по крайней мере, в квадратурах, а иногда и в элементарных функциях.*

Замечание. Если в системе (56) функции $f_k(x)$ представляют собою произведения показательной функции (с вещественным или комплексным показателем) на полином от x, то для построения общего решения этой системы можно вместо применения метода вариации произвольных постоянных найти частное решение методом неопределенных коэффициентов* и прибавить его к общему решению соответствующей однородной системы. Тогда, согласно п. **209**, мы и получим общее решение системы (56).

§ 2. ДРУГИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

218. Интегрирование линейной системы с постоянными коэффициентами при помощи приведения ее к уравнению n-го порядка (метод исключения). Применим к системе

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}y_l+f_k(x)\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

общий способ приведения нормальной системы n уравнений к одному уравнению n-го порядка, изложенный в п. **114**. Тогда

* См.: И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1952, стр. 185—188.

мы получим либо одно линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, либо несколько таких уравнений более низких порядков, причем сумма порядков всегда равна n. Найдя общее решение каждого из этих уравнений, мы получим общее решение системы (1) уже без дальнейших квадратур.

Пример. Найти общее решение системы:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Дифференцируя первое уравнение и, пользуясь вторым и третьим, получаем:

$$y_1'' = 2y_1 + y_2 + y_3. \tag{3}$$

Но $y_2 + y_3 = y_1'$. Поэтому

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0. \tag{4}$$

Исключим y_3. Из первого уравнения системы (2) имеем:

$$y_3 = y_1' - y_2. \tag{5}$$

Подставляя во второе уравнение, получаем

$$y_2' = y_1' - y_2 + y_1 \tag{6}$$

или

$$y_2' + y_2 = y_1' + y_1. \tag{7}$$

Таким образом система (2) приводится к двум линейным уравнениям (4) и (7) с неизвестными функциями y_1 и y_2 второго и первого порядка.

Интегрируя уравнение (4), находим:

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \tag{8}$$

Подставляя это значение y_1 в (7), получаем:

$$y_2' + y_2 = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \tag{9}$$

или

$$y_2' + y_2 = 3\,C_2 e^{2x}, \tag{10}$$

откуда

$$y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \tag{11}$$

Теперь находим y_3:

$$\begin{aligned} y_3 = y_1' - y_2 &= -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x} - C_2 e^{2x} = \\ &= -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Общее решение системы (2) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 &= C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_3 &= -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

219. Метод Даламбера. Мы показали в п. **112**, что знание $k (k < n)$ независимых первых интегралов нормальной системы n-го порядка дает возможность понизить порядок этой системы на k единиц. Если же мы знаем n независимых первых интегралов, то мы имеем общий интеграл.

Приемы нахождения первых интегралов, рассмотренные нами в п. п. **110, 117,** не дают возможности найти первые интегралы любой нормальной системы. Для линейной системы с постоянными коэффициентами Даламбер указал общий метод нахождения первых интегралов.

Рассмотрим этот метод в случае линейной системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11} y + a_{12} z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21} y + a_{22} z + f_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Умножим второе уравнение на некоторое число k и сложим почленно с первым. Получим:

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + k a_{21}) y + (a_{12} + k a_{22}) z + f_1(x) + k f_2(x) \tag{15}$$

или

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + k a_{21}) \left(y + \frac{a_{12} + k a_{22}}{a_{11} + k a_{21}} z \right) + f_1(x) + k f_2(x). \tag{16}$$

Выберем k так, чтобы

$$\frac{a_{12} + k a_{22}}{a_{11} + k a_{21}} = k \tag{17}$$

или

$$a_{12} + k a_{22} = k (a_{11} + k a_{21}). \tag{18}$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в виде:

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + k a_{21})(y + kz) + f_1(x) + k f_2(x). \tag{19}$$

Это есть линейное уравнение первого порядка с искомой функцией $y + kz$. Интегрируя его, найдем:

$$y + kz = e^{(a_{11} + k a_{21}) x} \left\{ C + \int [f_1(x) + k f_2(x)] e^{-(a_{11} + k a_{21}) x} dx \right\}. \tag{20}$$

Если корни уравнения (18) различные и вещественные, то, обозначив их через k_1 и k_2, будем иметь два первых интеграла в неявной форме* :

$$\left.\begin{aligned} y + k_1 z &= e^{(a_{11}+k_1 a_{21})x}\left\{C_1 + \int [f_1(x) + k_1 f_2(x)]\, e^{-(a_{11}+k_1 a_{21})x}\, dx\right\};\\ y + k_2 z &= e^{(a_{11}+k_2 a_{21})x}\left\{C_2 + \int [f_1(x) + k_2 f_2(x)]\, e^{-(a_{11}+k_2 a_{21})x}\, dx\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Разрешая систему (21) относительно C_1 и C_2, найдем общий интеграл системы (14), а разрешая относительно y и z, найдем общее решение этой системы.

Если корни уравнения (18) кратные: $k_1 = k_2$, то формула (20) дает только один первый интеграл:

$$y + k_1 z = e^{(a_{11}+k_1 a_{21})x}\left\{C_1 + \int [f_1(x) + k_1 f_2(x)]\, e^{-(a_{11}+k_1 a_{21})x} dx\right\}. \quad (22)$$

Подставляя значение y, найденное отсюда, во второе уравнение системы (14), получим одно линейное уравнение первого порядка с неизвестной функцией z.

Пример 1. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 5y + 4z,\\ z' &= 4y + 5z.\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Составляем уравнение для k:

$$4 + 5k = k(5 + 4k). \quad (24)$$

Отсюда $k_{1,2} = \pm 1$. Поэтому первыми интегралами будут:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= C_1 e^{9x},\\ y - z &= C_2 e^{x}.\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Разрешая систему (25) относительно y и z, получим общее решение системы (23).

Пример 2. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y + 4z + \cos x,\\ \frac{dz}{dx} &= -y - 2z + \sin x.\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Здесь мы имеем:

$$4 - 2k = k(2 - k),\quad k^2 - 4k + 4 = 0. \quad (27)$$

Это уравнение имеет двукратный корень $k_{1,2} = 2$. Поэтому метод Даламбера дает возможность найти только один первый интеграл.

Умножая второе из уравнений (26) на 2 и складывая почленно с первым, получаем:

$$\frac{d(y + 2z)}{dx} = \cos x + 2\sin x. \quad (28)$$

Отсюда находим первый интеграл системы (26)

$$y + 2z = \sin x - 2\cos x + C_1. \quad (29)$$

---

* Т. е. в виде, не разрешенном относительно произвольных постоянных.

Используя этот первый интеграл, мы можем переписать второе из уравнений (26) в виде

$$\frac{dz}{dx} = 2\cos x - C_1. \tag{30}$$

Отсюда:

$$z = 2\sin x - C_1 x + C_2. \tag{31}$$

Поэтому:

$$y = \sin x - 2\cos x + C_1 - 2z = \sin x - 2\cos x + C_1 - 4\sin x + \\ + 2C_1 x - 2C_2 = -3\sin x - 2\cos x + C_1(1 + 2x) - 2C_2. \tag{32}$$

Общее решение системы (26) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= -3\sin x - 2\cos x + C_1(1 + 2x) - 2C_2, \\ z &= 2\sin x - C_1 x + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫШЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

220. Метод исключения. Используя общий метод сведения любой канонической системы к уравнению более высокого порядка* , мы, вообще говоря, всегда можем свести линейную систему, содержащую производные выше первого порядка, к одному линейному уравнению более высокого порядка. Найдя решение этого уравнения, мы получим решение заданной системы уже без дальнейших квадратур.

Пример. Проинтегрировать систему** :

$$\left.\begin{aligned} y'' + k^2 z &= 0, \\ z'' + k^2 y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эта система приводится к одному уравнению четвертого порядка:

$$y^{(4)} - k^4 y = 0. \tag{2}$$

Отсюда:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \tag{3}$$

Поэтому:

$$z = -\frac{1}{k^2} y'' = -C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx} + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \tag{4}$$

221. Метод Даламбера. Метод Даламбера, изложенный в п. **219**, распространяется и на линейные системы уравнений, содержащие производные выше первого порядка.

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= a_{11} y + a_{12} z + f_1(x), \\ \frac{d^n z}{dx^n} &= a_{21} y + a_{22} z + f_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Умножая второе уравнение на k, складывая почленно с первым уравнением и выбирая k из условия

$$a_{12} + k a_{22} = k(a_{11} + k a_{21}), \tag{6}$$

---

* См. п. **115**.

** См. там же, пример 2.

получаем:

$$\frac{d^n(y+kz)}{dx^n} = (a_{11} + ka_{21})(y + kz) + f_1(x) + kf_2(x). \tag{7}$$

Это есть линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами относительно $y+kz$. Интегрируя его, найдем:

$$y + kz = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{8}$$

Если корни уравнения (6) различные, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned} y + k_1z &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y + k_2z &= \varphi_2(x, C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots, C_{2n}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Разрешая (9) относительно y и z, получим общее решение системы (5).

Укажем, в заключение, что линейная система с постоянными коэффициентами так же, как и линейное уравнение с постоянными коэффициентами, может быть проинтегрирована операторным методом*.

---

* См. первые три сноски на стр. 420.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 1. ЗАПИСЬ И РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

222. Предварительные замечания. Рассмотрим однородную линейную систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)\,y_1 + p_{12}(x)\,y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\,y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)\,y_1 + p_{22}(x)\,y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\,y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)\,y_1 + p_{n2}(x)\,y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\,y_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\,y_l \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1'}$$

Предположим, что коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны в интервале $(a,\ b)$. Тогда система (1) имеет* фундаментальную систему решений, которую можно записать в виде следующей таблицы:

$$\left.\begin{matrix} y_{11}(x), & y_{12}(x), & \ldots, & y_{1n}(x), \\ y_{21}(x), & y_{22}(x), & \ldots, & y_{2n}(x), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x), & y_{n2}(x), & \ldots, & y_{nn}(x) \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

* См. п. **204**.

или

$$y_{i1}(x),\ y_{i2}(x),\ \ldots,\ y_{in}(x)\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2'}$$

где каждая из функций определена и непрерывна в (a, b). Если, кроме того, предположить, что все коэффициенты системы (1) голоморфны в интервале $|x - x_0| < \rho$, то и все функции, составляющие фундаментальную систему решений, заведомо голоморфны в этом интервале.

В таблице (2) каждая из функций находится на месте, определяемом двумя индексами, из которых первый означает номер строки (номер решения), а второй — номер столбца (номер функции), и мы должны рассматривать таблицу (2), как единое целое, не переставляя функций, входящих в ее состав. Такого рода таблицы называются *матрицами*.

В двух предыдущих главах мы строили фундаментальную систему решений, находя последовательно отдельные решения, из которых она состоит. Возникает вопрос, нельзя ли, рассматривая фундаментальную систему решений как матрицу, дать способ нахождения всей фундаментальной системы сразу и изучить ее возможную аналитическую структуру в зависимости от аналитической структуры коэффициентов системы.

Исключительная заслуга в выяснении аналитической структуры фундаментальной системы решений при помощи матричного метода принадлежит выдающемуся советскому математику И. А. Лаппо-Данилевскому, который разработал теорию функций от матриц и применил ее к исследованию однородных линейных систем дифференциальных уравнений* .

В настоящей главе мы даем понятие о матричном методе интегрирования однородной линейной системы и применяем его для выяснения аналитической структуры фундаментальной системы решений однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.

Для понимания материала этой главы от читателя требуется знание основ матричного исчисления в объеме курса высшей алгебры** . Кроме того, понадобятся приводимые ниже понятия производной, интеграла и экспоненциальной функции от матрицы*** .

---

* См.: И. А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат. 1957; Н. П. Ерутин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, Изд. АН БССР, 1963 г.; Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966, стр. 124—126, 419—465.

** Все необходимые сведения читатель найдет в книгах: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. I. Гостехиздат, 1949, пп. 20, 21, 25—27, 44; Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Изд-во ЛГУ, 1965, стр. 311—321.

*** См. цитированную выше книгу И. А. Лаппо-Данилевского.

Рассмотрим матрицу

$$Z(x)=\begin{Vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

элементы которой являются функциями от x.

Предположим, что каждый элемент матрицы $Z(x)$ имеет производную в точке $x=x_0$. Тогда *определим производную от матрицы $Z(x)$ в точке $x=x_0$* при помощи равенства

$$\frac{dZ(x_0)}{dx}=\left\Vert\frac{dz_{ik}(x_0)}{dx}\right\Vert, \tag{4}$$

так что *дифференцирование матрицы* сводится к дифференцированию всех ее элементов.

Обычные правила дифференцирования функций справедливы и для дифференцирования матриц.

Если A постоянная матрица, то

$$\frac{dA}{dx}=0. \tag{5}$$

$$\frac{d(AZ)}{dx}=A\frac{dZ}{dx},\quad \frac{d(\alpha Z)}{dx}=\alpha\frac{dZ}{dx}\,{}^{*}. \tag{6}$$

$$\frac{d(Z_1+Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dx}. \tag{7}$$

$$\frac{d(Z_1Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}Z_2+Z_1\frac{dZ_2}{dx}, \tag{8}$$

причем в формуле (8) нельзя переставлять сомножители.

Производная от целой положительной степени матрицы $Z(x)$ вычисляется путем последовательного применения последнего правила. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dZ^2}{dx}=\frac{d(ZZ)}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z+Z\frac{dZ}{dx}, \\ &\frac{dZ^3}{dx}=\frac{d(Z^2Z)}{dx}=\frac{dZ^2}{dx}Z+Z^2\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z^2+Z\frac{dZ}{dx}Z+Z^2\frac{dZ}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Продолжая, найдем:

$$\frac{dZ^m}{dx}=\sum_{k=0}^{m-1}Z^k\frac{dZ}{dx}Z^{m-k-1}. \tag{10}$$

Эта довольно громоздкая формула упрощается, если матрица $Z(x)$ коммутирует со своей производной, т. е. если**

---

* Здесь α — любое число, вещественное или комплексное.

** О структуре матриц, обладающих свойством (11) См.: Ю. С. Богданов и Г. Н. Чеботарев. О матрицах, коммутирующих со своей производной. Известия высш. учеб. завед. Математика № 4 (11), 1959.

$$Z\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z. \tag{11}$$

В этом случае мы получаем правило, аналогичное обычному правилу дифференцирования сложной степенной функции

$$\frac{dZ^m}{dx}=mZ^{m-1}\frac{dZ}{dx}. \tag{12}$$

Для вычисления производной от обратной матрицы $Z^{-1}(x)$ продифференцируем тождество*

$$Z(x)Z^{-1}(x)=I. \tag{13}$$

Получаем:

$$\frac{dZ}{dx}Z^{-1}+Z\frac{dZ^{-1}}{dx}=0.$$

Откуда

$$Z\frac{dZ^{-1}}{dx}=-\frac{dZ}{dx}Z^{-1} \tag{14}$$

или

$$\frac{dZ^{-1}}{dx}=-Z^{-1}\frac{dZ}{dx}Z^{-1}. \tag{15}$$

Из этой формулы видно, что $\frac{dZ^{-1}}{dx}$ существует во всех точках, где существует $\frac{dZ}{dx}$ и где $D(Z)\neq 0$**. Если выполнено условие (11), то

$$Z^{-1}\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z^{-1}, \tag{16}$$

а тогда

$$\frac{dZ^{-1}}{dx}=-Z^{-2}\frac{dZ}{dx}. \tag{17}$$

Операция *интегрирования матрицы* определяется как операция, обратная дифференцированию

$$\int Z(x)\,dx=\left\|\int z_{ik}(x)\,dx\right\| \tag{18}$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x} Z(x)\,dx=\left\|\int\limits_{x_0}^{x} z_{ik}(x)\,dx\right\|. \tag{19}$$

Легко убедиться, что

$$\int\limits_{x_0}^{x} A\,dx=A(x-x_0), \tag{20}$$

---

* I — единичная матрица порядка n.

** $D(A)$ — определитель матрицы A.

$$\int_{x_0}^{x} AZ(x)\,dx = A\int_{x_0}^{x} Z(x)\,dx, \tag{21}$$

$$\int_{x_0}^{x} [Z_1(x) + Z_2(x)]\,dx = \int_{x_0}^{x} Z_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} Z_2(x)\,dx. \tag{22}$$

Экспоненциальная функция от матрицы Z определяется равенством

$$e^Z = I + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^\nu}{\nu!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Z^\nu}{\nu!}, \tag{23}$$

где I — единичная матрица порядка n. Один матричный степенной ряд (23) равносилен n^2 обычным (скалярным) степенным рядам с вещественными или комплексными членами:

$$\delta_{ik} + \{Z\}_{ik} + \frac{1}{2!}\{Z^2\}_{ik} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\{Z^\nu\}_{ik} + \ldots =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\{Z^\nu\}_{ik}, \tag{24}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } k = i, \\ 0 \text{ при } k \neq i. \end{cases} \tag{25}$$

Если матрица A коммутирует с матрицей B, то нетрудно показать, что

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}. \tag{26}$$

Если Z есть *чисто диагональная матрица*

$$Z = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n], \tag{27}$$

то, вследствие того, что

$$[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]^\nu = [a_1^\nu,\ a_2^\nu,\ \ldots,\ a_n^\nu],$$

получаем

$$e^{[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]} = [e^{a_1},\ e^{a_2},\ \ldots,\ e^{a_n}], \tag{28}$$

т. е. экспоненциальная функция от диагональной матрицы представляет собою диагональную матрицу, диагональными элементами которой являются соответствующие экспоненциальные функции.

Если Z есть *квазидиагональная матрица*

$$Z = [A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s], \tag{29}$$

то, вследствие того, что

$$[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s]^\nu = [A_1^\nu,\ A_2^\nu,\ \ldots,\ A_s^\nu], \tag{30}$$

получаем:

$$e^{[A_1, A_2, \ldots, A_s]} = [e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_s}]. \qquad (31)$$

Предположим, что матрица Z является дифференцируемой функцией от x. Вычислим тогда *производную от функции* e^Z дифференцируя почленно ряд (23):

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Z^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\frac{d(Z^\nu)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\sum_{k=0}^{\nu-1}Z^k\frac{dZ}{dx}Z^{\nu-k-1}. \qquad (32)$$

Предположим, что матрица Z коммутирует со своей производной, т. е. выполнено условие (11).

Тогда

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Z^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot\frac{dZ}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Z^\nu}{\nu!}\cdot\frac{dZ}{dx} = e^Z\frac{dz}{dx}. \qquad (33)$$

Итак, *если матрица* $Z(x)$ *коммутирует со своей производной, то*

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = e^Z\frac{dZ}{dx}. \qquad (34)$$

В частности, если $Z=Ax$, где A — постоянная матрица, то

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx} = e^{Ax}A = Ae^{Ax}. \qquad (35)$$

Заметим, что известное свойство преобразования подобия, выражаемое формулой

$$SF(Z)S^{-1} = F(SZS^{-1}), \qquad (36)$$

где $F(Z)$ — полином от матрицы Z (*матрица, подобная полиному от матрицы Z, равна тому же полиному от матрицы, подобной матрице Z*), распространяется и на экспоненциальную функцию от матрицы Z, а именно имеем:

$$Se^Z S^{-1} = e^{SZS^{-1}}. \qquad (37)$$

223. Построение матричного уравнения, равносильного однородной линейной системе. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{21}(x)y_2 + \ldots + p_{n1}(x)y_n, \\
\dfrac{dy_2}{dx} = p_{12}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{n2}(x)y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = p_{1n}(x)y_1 + p_{2n}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n
\end{array}\right\} \qquad (38)$$

или, короче,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x)\, y_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

где коэффициенты $p_{lk}(x)$ непрерывны в некотором интервале (a, b).

Обращаем особое внимание читателя на то, что здесь для удобства дальнейших выкладок мы в отличие от ранее применявшейся записи системы [см., например п. 222] изменяем порядок индексов у коэффициентов. Теперь первый индекс коэффициента $p_{lk}(x)$ совпадает с номером искомой функции y_l, а второй указывает на номер уравнения.

Пусть

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

есть фундаментальная система решений. Подставляя последовательно каждое из решений (40) в систему (39), получим n^2 тождеств

$$\frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x)\, y_{il} \quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{41}$$

Естественно попытаться заменить эти n^2 тождеств одним матричным тождеством. С этой целью введем в рассмотрение две матрицы:

$$Y(x) = \left\| \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad P(x) = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\|. \tag{42}$$

где Y — матрица фундаментальной системы решений системы (38), а P — матрица, полученная транспонированием матрицы коэффициентов этой системы. Тогда ясно, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{ik}}{dx} &= \left\{\frac{dY}{dx}\right\}_{ik}, \\ \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x)\, y_{il} &= \sum_{l=1}^{n} \left\{P\right\}_{lk} \left\{Y\right\}_{il} = \sum_{l=1}^{n} \left\{Y\right\}_{il} \left\{P\right\}_{lk} = \left\{YP\right\}_{ik}, \\ & \qquad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

так что тождества (41) можно переписать в виде

$$\left\{\frac{dY}{dx}\right\}_{ik} \equiv \left\{YP\right\}_{ik} \quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{44}$$

или в виде одного матричного тождества

$$\frac{dY}{dx} \equiv YP, \tag{45}$$

т. е. матрица фундаментальной системы решений системы (39) является *решением* уравнения

$$\frac{dY}{dx} = YP. \tag{46}$$

Это уравнение называется *матричным уравнением, соответствующим системе* (39).

В дальнейшем матрицу Y, обращающую уравнение (46) в тождество (45), будем называть *интегральной матрицей* уравнения (46) в интервале (a, b), если ее определитель $D(Y) \neq 0$ для всех значений x из этого интервала. Ясно, что всякая интегральная матрица уравнения (46) является матрицей некоторой фундаментальной системы решений однородной линейной системы (39).

Таким образом, задача интегрирования системы (39) равносильна нахождению интегральной матрицы уравнения (46). Вопрос о существовании и структуре фундаментальной системы решений системы (39) равносилен вопросу о существовании и структуре интегральной матрицы уравнения (46).

Матрица начальных значений решений, составляющих фундаментальную систему, называется *начальным значением* соответствующей ей интегральной матрицы Y. Будем обозначать начальное значение интегральной матрицы Y через Y_0, так что

$$Y(x_0) = Y_0, \; x_0 \in (a, b). \tag{47}$$

Из формулы (39) п. **202** следует, что для определителя интегральной матрицы Y имеет место формула

$$D(Y) = (DY_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(P)\, dx}, \tag{48}$$

где

$$\sigma(P) = \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x) \tag{49}$$

— *след* матрицы P.

Точка $x = x_0$ называется *неособой точкой* матричного уравнения (46), если она является неособой *точкой* соответствующей ему системы (39). В противном случае точка $x = x_0$ называется *особой точкой* уравнения (46).

Вопрос о существовании интегральной матрицы с начальным значением в н е о с о б о й т о ч к е решается легко. А именно из теоремы о существовании фундаментальной системы решений однородной линейной системы вытекает, что *если $P(x)$ непрерывна в интервале (a, b)** , *то существует единственная инте-*

* Матрица $P(x)$ называется *непрерывной* в интервале (a, b), если все элементы ее суть функции от x, непрерывные в этом интервале.

гральная матрица $Y(x)$, удовлетворяющая начальному условию (47), определенная и непрерывно дифференцируемая во всем интервале (a, b), причем за Y_0 можно брать любую постоянную матрицу лишь бы $D(Y_0) \neq 0$.

Если, кроме того, предположить, что $P(x)$ голоморфна в окрестности $|x-x_0| < \rho$ точки $x=x_0$, то существует единственная интегральная матрица, голоморфная в той же окрестности и удовлетворяющая начальному условию (47), где Y_0 — произвольная постоянная матрица с $D(Y_0) \neq 0$.*

Интегральная матрица Y, обращающаяся в единичную матрицу I в точке $x=x_0$, лежащей в интервале (a, b), т. е. интегральная матрица, удовлетворяющая начальному условию:

$$Y(x_0) = I, \tag{50}$$

называется *нормированной* в точке $x=x_0$.

Поведение интегральной матрицы (с начальным значением в неособой точке) в окрестности особой точки уравнения (46), а также аналитическая структура интегральной матрицы в окрестности особой точки являются основными вопросами аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Мы не затрагиваем здесь этих вопросов, отсылая читателя к специальной литературе**, а ограничиваемся лишь рассмотрением общих свойств уравнения (46), основных свойств интегральной матрицы и построением интегральных матриц в простейших случаях.

224. Два общих свойства матричного уравнения, соответствующего однородной линейной системе***. Отметим два общих свойства матричного уравнения (46).

I. *Уравнение* (46) *остается линейным при любой замене независимой переменной*

$$x = \varphi(t), \tag{51}$$

где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция непрерывна

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}. \tag{52}$$

Поэтому, подставляя $x=\varphi(t)$ в уравнение (46), получим:

$$\frac{dY}{dt} = YP[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \tag{53}$$

* Матрица $P(x)$ называется *голоморфной в окрестности* $|x-x_0| < \rho$ *точки* $x=x_0$, если все элементы ее разлагаются в степенные ряды по степеням разности $x-x_0$, сходящиеся в области $|x-x_0| < \rho$.

** См. первую сноску на стр. 512.

*** Ср. пп. **32** и **197**.

или

$$\frac{dY}{dt} = YP_1, \tag{54}$$

где

$$P_1 = P[\varphi(t)]\varphi'(t). \tag{55}$$

2. *Уравнение (46) остается линейным, если вместо интегральной матрицы Y ввести новую интегральную матрицу Z при помощи подстановки*

$$Y = ZQ, \tag{56}$$

где Q — неособенная дифференцируемая матрица.*

Действительно, так как

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} Q + Z\frac{dQ}{dx}, \tag{57}$$

то, выполняя в уравнении (46) подстановку (56), будем иметь:

$$\frac{dZ}{dx} Q + Z\frac{dQ}{dx} = ZQP,$$

откуда

$$\frac{dZ}{dx} = ZQPQ^{-1} - Z\frac{dQ}{dx}Q^{-1} \tag{58}$$

или

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \tag{59}$$

где

$$B = QPQ^{-1} - \frac{dQ}{dx}Q^{-1}. \tag{60}$$

Если, в частности, $Q(x) = S = \text{const}$, причем $D(S) \neq 0$, то

$$B = SPS^{-1},$$

так что подстановка

$$Y = ZS \quad [D(S) \neq 0] \tag{61}$$

приводит к уравнению, в котором матрица P заменяется подобной матрицей SPS^{-1} с матрицей подобия S:

$$\frac{dZ}{dx} = Z(SPS^{-1}). \tag{62}$$

225. Основные свойства интегральной матрицы. Прежде, чем рассмотреть вопрос о построении решения уравнения (46), докажем два общих свойства интегральных матриц этого уравне-

* Матрица A называется *неособенной*, если $D(A) \neq 0$.

ния, аналогичных свойствам решений однородного линейного уравнения первого порядка.

1. *Если Y_1 — интегральная матрица уравнения* (46), *то матрица*

$$Y = CY_1, \tag{63}$$

где C — любая постоянная неособенная матрица, также является интегральной матрицей этого уравнения.

Действительно, дифференцируя CY_1, имеем:

$$\frac{d(CY_1)}{dx} = C\frac{dY_1}{dx}.$$

Но $\frac{dY_1}{dx} \equiv Y_1 P$. Поэтому

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv CY_1 P$$

или

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv (CY_1)P.$$

Кроме того, $D(CY_1) = D(C)\ D(Y_1) \neq 0$. Следовательно, $Y = CY_1$ есть интегральная матрица уравнения (46).

2. *Если Y_1 — интегральная матрица уравнения* (46), *определенная в интервале* (a, b)*, *то все интегральные матрицы, определенные в этом интервале, содержатся в формуле* (63).

В самом деле, пусть $\widetilde{Y}(x)$ — интегральная матрица уравнения (46), удовлетворяющая начальному условию

$$\widetilde{Y}(x_0) = \widetilde{Y}_0.$$

Полагая в (63) $x = x_0$ и $Y = \widetilde{Y}_0$, получим уравнение:

$$\widetilde{Y}_0 = CY_1(x_0),$$

откуда

$$C = \widetilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0).$$

Подставляя найденное значение матрицы C в формулу (63), получим интегральную матрицу

$$Y = \widetilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0) Y_1.$$

Так как эта интегральная матрица имеет то же начальное значение, что и матрица $\widetilde{Y}$, то в силу теоремы единственности обе

* Т. е. в интервале **непрерывности** матрицы $P(x)$.

эти интегральные матрицы совпадают, и мы получаем

$$\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0) Y_1.$$

Таким образом, любая интегральная матрица получается из (63) при соответствующем выборе матрицы C.

Если, в частности, интегральная матрица Y_1, нормирована в точке $x=x_0$, то любая интегральная матрица Y выражается через Y_1 по формуле

$$Y = Y(x_0) Y_1. \tag{64}$$

Из сказанного вытекает, что *между различными фундаментальными системами решений однородной линейной системы существует связь и эта связь выражается формулой* (63), *где* $D(C)\neq 0$. Согласно этой формуле, *все фундаментальные системы решений могут быть получены из одной, например, из нормированной фундаментальной системы.* Таким образом, мы получаем положительный ответ на вопрос, поставленный в конце п. **204.**

Из доказанного свойства вытекает, что для *интегрирования уравнения* (46) *достаточно найти хоть одну интегральную матрицу.* Например, как чаще всего это и делают, достаточно найти нормированную интегральную матрицу.

226. Случай Лаппо-Данилевского. Отметим один частный случай, в котором задача построения интегральной матрицы решается легко.

Предположим, что матрица P коммутирует со своим интегралом:

$$P \cdot \int_{x_0}^{x} P\,dx = \int_{x_0}^{x} P\,dx \cdot P. \tag{65}$$

В этом случае за интегральную матрицу можно взять

$$Y_1 = e^{\int_{x_0}^{x} P\,dx}. \tag{66}$$

Действительно, дифференцируя (66), получаем:

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\int_{x_0}^{x} P\,dx} = e^{\int_{x_0}^{x} P\,dx} P^* = Y_1 P \quad \text{или} \quad \frac{dY_1}{dx} = Y_1 P, \tag{67}$$

т. е. матрица (66) является интегральной матрицей уравнения (46).

---

* Здесь, дифференцируя экспоненциальную функцию от матрицы $\int_{x_0}^{x} P\,dx$, мы воспользовались формулой (34) п. **222**, на что имели право, ибо эта матрица, в силу условия (65), коммутирует со своей производной.

Заметим, что матрица (66) нормирована в точке $x = x_0$.

Условие (65), *в частности, очевидно, выполнено, если* $P = A = \mathrm{const}$, *т. е. когда мы имеем однородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение* (46) *принимает вид*

$$\frac{dY}{dx} = YA, \tag{68}$$

и его интегральной матрицей будет

$$Y_1 = e^{A(x-x_0)} \tag{69}$$

или (полагая $x_0 = 0$*)*

$$Y_1 = e^{Ax}. \tag{70}$$

Все интегральные матрицы уравнения (68) *содержатся в формуле*

$$Y = Ce^{Ax}, \tag{71}$$

где C — *произвольная постоянная неособенная матрица.*

В пункте **228** мы займемся специальным рассмотрением случая $P = A = \mathrm{const}$ и выясним структуру интегральной матрицы (70).

227. Сопряженное (присоединенное) матричное уравнение. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_k}{dx} = -\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_l , \tag{72}$$

сопряженная с системой (39) **[207]**, может быть записана в матричном виде так:

$$\frac{dZ}{dx} = -ZP^*, \tag{73}$$

где

$$Z = \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{matrix} \right\| , \tag{74}$$

а P^* — транспонированная матрица по отношению к матрице P.

Выполняя над обеими частями уравнения (73) операцию транспонирования, получим:

$$\frac{dZ^*}{dx} = -PZ^*, \tag{75}$$

где

$$Z^* = \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{n1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{1n} & z_{2n} & \dots & z_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{76}$$

Уравнение (75) называется *сопряженным* с уравнением (46) или *присоединенным* к уравнению (46).

Обращаем особое внимание читателя на одну особенность интегральной матрицы (76) сопряженного уравнения (75): в ней решения расположены по с т о л б ц а м, а не по строкам, как в интегральной матрице Y.

Нетрудно убедиться, что интегральные матрицы уравнения (46) и сопряженного уравнения (75) связаны соотношением

$$ZY^* \equiv \quad = \text{const}. \tag{77}$$

Действительно, имеем:

$$\frac{d(YZ^*)}{dx} = \frac{dY}{dx} Z^* + Y \frac{dZ^*}{dx} = YPZ^* - YPZ^* = 0. \tag{78}$$

Следовательно,

$$YZ^* = C. \tag{79}$$

Из равенства (79) вытекает, что

$$Z^* = Y^{-1} C. \tag{80}$$

Отсюда, в частности, следует, что если Y есть интегральная матрица уравнения (46), то Y^{-1} будет интегральной матрицей сопряженного уравнения (75). При этом надо только не забывать, что в матрице Y^{-1} решения расположены по столбцам.

Таким образом, мы вновь* убеждаемся, что задача интегрирования системы (39) равносильна задаче интегрирования сопряженной системы (72).

Если система (39) с а м о с о п р я ж е н н а я, т. е. $p_{ik} = -p_{ki}$, то сопряженное уравнение (75) примет вид

$$\frac{dZ^*}{dx} = P^* Z^* \tag{81}$$

и ясно, что в качестве интегральной матрицы Z^* можно взять Y.

Действительно, если Y есть интегральная матрица уравнения (46), то мы имеем тождество

$$\frac{dY}{dx} = YP. \tag{82}$$

Транспонируя обе части этого тождества, получаем

---

* Ср. п. **207**.

$$\frac{dY^*}{dx} = P^*Y^*, \tag{83}$$

т. е. Y^* есть интегральная матрица уравнения (81).

Подставляя $Z^* = Y^*$ в тождество (77), получим:

$$YY^* = C \tag{84}$$

или

$$\sum_{l=1}^{n} y_{il}\, y_{kl} = c_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{85}$$

Отсюда, в частности, при $i=k$ снова получаем *, что всякое решение самосопряженной системы обладает свойством

$$y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + \ldots + y_{in}^2 = \text{const} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{86}$$

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

228. Структура фундаментальной системы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Группы решений **. Рассмотрим систему:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} y_l \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где a_{lk} постоянные вещественные числа. Эта система равносильна матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = YA, \tag{2}$$

где

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Интегральной матрицей уравнения (2) будет***

$$Y_1 = e^{Ax}. \tag{4}$$

Изучим структуру этой интегральной матрицы в зависимости от матрицы A. Тем самым мы изучим структуру фундаментальной системы решений системы (1) в зависимости от ее коэф-

---

* Ср. п. 207.

** См.: А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1950, стр. 95—97; Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955, стр. 57—72.

*** См. п. 226, формула (70).

фициентов. Как увидим из дальнейшего, эта структура существенно зависит от характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и элементарных делителей матрицы A. Знание их дает возможность привести матрицу A к простейшему, так называемому, каноническому виду*.

Предположим сначала, что матрица A имеет простые элементарные делители $\lambda-\lambda_1, \lambda-\lambda_2, \ldots, \lambda-\lambda_n$ и, следовательно, она имеет *каноническое представление***

$$A = S^{-1}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] S, \tag{5}$$

где среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, матрицы A могут быть и одинаковые. Тогда:

$$Y_1 = e^{Ax} = e^{S^{-1}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] Sx} = e^{S^{-1}[\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x] S} =$$
$$= S^{-1} e^{[\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x]} S^{***} = S^{-1}[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}] S. \tag{6}$$

Умножая интегральную матрицу (6) слева на S (отчего, согласно п. **225**, она не перестает быть интегральной, но уже не будет нормированной в точке $x=0$), получаем:

$$Y = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}] S. \tag{7}$$

Пусть

$$S = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Тогда:

$$Y = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{12}e^{\lambda_1 x} & \ldots & \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_2 x} & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x} & \gamma_{n2}e^{\lambda_n x} & \ldots & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

---

*См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. I. М., Гостехиздат, 1949, пп. 25—27, 44; Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955, стр. 72—79; Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Методическое пособие для заочников. Изд-во ЛГУ, 1963, стр. 345—350.

** Здесь $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ есть диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ по главной диагонали. В данном случае она представляет собою *канонический вид матрицы* A.

*** Здесь мы воспользовались формулой (37) п. **222**.

Таким образом, *в случае простых элементарных делителей, независимо от того, являются все характеристические числа простыми или среди них имеются кратные, фундаментальная система имеет ту же структуру, что и в случае простых корней характеристического уравнения**.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть матрица A имеет элементарные делители

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, \ (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \ \ldots, \ (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s}, \tag{10}$$

где среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ могут быть и одинаковые; $1 \leqslant \rho_m \leqslant n$, причем $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n$, и, следовательно, *каноническим представлением матрицы* A будет

$$A = S^{-1}\,[I_{\rho_1}(\lambda_1), \ I_{\rho_2}(\lambda_2), \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)]\,S.^{**} \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_1 = e^{Ax} &= e^{S^{-1}[I_{\rho_1}(\lambda_1), \ I_{\rho_2}(\lambda_2), \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)]\,Sx} = \\ &= e^{S^{-1}[I_{\rho_1}(\lambda_1)x, \ I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)x]\,S} = \\ &= S^{-1}\,e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1)x, \ I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)x]}\,S = \\ &= S^{-1}\,e[^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, \ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \ \ldots, \ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]\,S \end{aligned}$$

или

$$Y_1 = S^{-1}\,[e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, \ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \ \ldots, \ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]\,S. \tag{12}$$

Умножая эту интегральную матрицу слева на S, получаем интегральную матрицу

$$Y = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, \ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \ \ldots, \ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]\,S. \tag{13}$$

Вычислим матрицу $e^{I_\rho(\lambda)x}$. Имеем:

$$e^{I_\rho(\rho)x} = e^{[\lambda + I_\rho(0)]x} = e^{\lambda x + I_\rho(0)x} = e^{\lambda x}\,e^{I_\rho(0)x}. \tag{14}$$

Далее

$$e^{I_\rho(0)x} = I_\rho + I_\rho(0)\,x + \frac{1}{2!}[I_\rho(0)]^2 x^2 + \ldots + \frac{1}{\nu!}[I_\rho(0)]^\nu x^\nu + \ldots \tag{15}$$

(Здесь I_ρ — единичная матрица порядка ρ).

Но

$$[I_\rho(0)]^2 = I_\rho^{(2)}(0), \tag{16}$$

---

* См. п. 212, формула (10).

** Здесь $I_\rho(a)$ есть матрица порядка ρ, в которой по главной диагонали стоит число a, на следующей нижестоящей диагонали число 1, а все остальные элементы равны нулю; $I_1(a) = a$. Квазидиагональная матрица $[I_{\rho_1}(\lambda_1), \ I_{\rho_2}(\lambda_2), \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)]$ представляет собою в рассматриваемом случае *канонический вид матрицы* A.

где

$$I_\rho^{(2)}(0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

и вообще при $\nu < \rho$ будем иметь:

$$[I_\rho(0)]^\nu = I_\rho^{(\nu)}(0), \tag{18}$$

где

$$I_\rho^{(\nu)}(0) = \begin{array}{l} \nu\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \;\dots\; 0}_{\nu}} \end{Vmatrix} \tag{19}$$

Вообще:

$$[I_\rho(0)]^\nu = \begin{cases} I_\rho^{(\nu)}(0), & \text{если } \nu < \rho, \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant \rho. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$e^{I_\rho(0)x} = I_\rho + I_\rho(0)\,x + \frac{1}{2!} I_\rho^{(2)}(0)\,x^2 + \dots + \frac{1}{(\rho-1)!} I_\rho^{(\rho-1)}(0)\,x^{\rho-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & \frac{x^{\rho-2}}{(\rho-2)!} & \frac{x^{\rho-3}}{(\rho-3)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Теперь, принимая во внимание (14), получаем:

$$e^{I_\rho(\lambda)x} = \begin{Vmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!}e^{\lambda x} & \frac{x^{\rho-2}}{(\rho-2)!}e^{\lambda x} & \frac{x^{\rho-3}}{(\rho-3)!}e^{\lambda x} & \dots & \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Вследствие этого *решения, составляющие интегральную матрицу (13), разобьются на s групп, содержащих соответственно* $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_s$ *решений, причем* μ*-тая группа имеет следующий вид:*

$$\left.\begin{array}{llll} P_{1,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x)e^{\lambda_\mu x}, & P_{2,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x)e^{\lambda_\mu x}, & \ldots, & P_{n,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x)e^{\lambda_\mu x}, \\ P_{1,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x)e^{\lambda_\mu x}, & P_{2,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x)e^{\lambda_\mu x}, & \ldots, & P_{n,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x)e^{\lambda_\mu x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P'_{1,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}, & P'_{2,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}, & \ldots, & P'_{n,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}, \\ P_{1,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}, & P_{2,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}, & \ldots, & P_{n,\mu}(x)e^{\lambda_\mu x}. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Все решения этой группы получены из последнего решения последовательным дифференцированием коэффициентов при $e^{\lambda_\mu x}$. *Эти коэффициенты представляют собою полиномы степени не выше, чем* $\rho_\mu - 1$, *где* ρ_μ *— степень элементарного делителя, соответствующего характеристическому числу* λ_μ

Напоминаем еще раз, что здесь среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ могут быть и одинаковые.

Из доказанного легко получить *вид решений, соответствующих характеристическому числу* λ_1 *кратности* k*.

Если характеристическому числу λ_1 *соответствует только один элементарный делитель* $(\lambda - \lambda_1)^k$, *то мы получаем одну группу решений вида* (23), *где следует положить* $\lambda_\mu = \lambda_1$. *Эта группа содержит* k *решений.* Этот случай имеет место, когда хоть один из определителей $(n-1)$-го порядка, составленных из характеристического определителя, не делится на $\lambda - \lambda_1$, т. е. хоть один из этих определителей не обращается в нуль при $\lambda = \lambda_1$.

Если же характеристическому числу λ_1 *соответствует несколько элементарных делителей:*

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_1}, \ (\lambda - \lambda_1)^{l_2}, \ \ldots, \ (\lambda - \lambda_1)^{l_{m+1}}, \quad (24)$$

причем $l_1 + l_2 + \ldots + l_{m+1} = k$, *то ему соответствует* $m+1$ *групп решений вида* (23), *причем каждая группа содержит соответственно* $l_1, l_2, \ldots, l_{m+1}$ *решений.*

Этот случай будет иметь место всякий раз, когда характеристическое число λ_1 обращает в нуль все определители, составленные из характеристического определителя до порядка $n - m$, не обращая в нуль, по крайней мере, одного из определителей порядка $n - m - 1$.

В частности, если все элементарные делители, соответствующие характеристическому числу λ_1, *простые*

$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1$ (*k элементарных делителей*), *то мы*

---

* См.: А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 96—97.

получаем k решений такого же типа, как и в случае простого корня характеристического уравнения.

Во всех случаях характеристическому числу λ_1 кратности k будет таким образом соответствовать k линейно независимых решений, образующих одну или несколько (но не больше чем k) групп вида (23).

Докажем теперь теорему п. **213** о решении, соответствующем характеристическому числу кратности k.

Пусть λ_1 — характеристическое число кратности k. Построим, согласно предыдущему, k линейно независимых решений, соответствующих этому характеристическому числу. Возьмем линейную комбинацию этих решений с k произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Тогда мы и получим решение вида

$$y_1 = P_1(x)\, e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = P_2(x)\, e^{\lambda_1 x}, \; \ldots, \; y_n = P_n(x)\, e^{\lambda_1 x}, \tag{25}$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ суть полиномы степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k произвольных коэффициентов, что и требовалось доказать.

229. Приведение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду. В предыдущем пункте, рассматривая вопрос о структуре фундаментальной системы решений однородной линейной системы (1), мы брали в качестве интегральной матрицы уравнения (2) матрицу (4), заменяли в ней матрицу A ее каноническим представлением (5) или (11) и умножали затем полученную интегральную матрицу слева на S.

Но можно поступить иначе. Мы уже знаем*, что подстановка

$$Y = ZS\,[D(S) \neq 0] \tag{26}$$

приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \tag{27}$$

где $B = SAS^{-1}$. Выберем матрицу S так, чтобы B имела канонический вид

$$B = [I_{\rho_1}(\lambda_1), \; I_{\rho_2}(\lambda_2), \; \ldots, \; I_{\rho_s}(\lambda_s)], \tag{28}$$

---

* См. п. 224, формулы (61) и (62).

так что

$$A = S^{-1}\,[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]\,S. \tag{29}$$

Тогда подстановка (26) приведет уравнение (2) к виду

$$\frac{dZ}{dx} = Z\,[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]. \tag{30}$$

Полученное уравнение (30) называется *уравнением канонического вида, соответствующим данному уравнению* (2). За интегральную матрицу уравнения (30) можно взять

$$Z = e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]\,x} \tag{31}$$

или

$$Z = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x},\ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x},\ \ldots,\ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]. \tag{32}$$

Подставляя это значение Z в формулу (26), мы получим интегральную матрицу уравнения (2) или, что то же, фундаментальную систему решений системы (1) в виде

$$Y = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x},\ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x},\ \ldots,\ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]\,S, \tag{33}$$

т. е. снова в виде (13).

Система дифференциальных уравнений, соответствующая матричному уравнению (30), называется *каноническим видом системы* (1).

Перейдем от матричного уравнения (30) к соответствующей ему системе дифференциальных уравнений. Для этого вспомним, что при переходе от системы к матричному уравнению мы транспонировали матрицу коэффициентов системы. Поэтому при переходе от матричного уравнения (30) к соответствующей системе мы должны транспонировать матрицу $[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]$. Если еще принять во внимание структуру этой матрицы, то нетрудно убедиться, что мы получим однородную линейную систему n уравнений, которая разбивается на s групп, т. е. на столько групп, сколько различных элементарных делителей имеет матрица A, причем число уравнений, содержащихся в каждой группе, равно степени элементарного делителя, соответствующего этой группе. В каждой группе уравнений диагональные коэффициенты равны соответствующему характеристическому числу, коэффициенты, стоящие на параллельной верхней диагонали, равны единице, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, *каноническим видом системы* (1) *будет:*

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + z_2, \\
\frac{dz_2}{dx} &= \qquad \lambda_1 z_2 + z_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_{\rho_1-1}}{dx} &= \qquad\qquad \lambda_1 z_{\rho_1-1} + z_{\rho_1}, \\
\frac{dz_{\rho_1}}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_1 z_{\rho_1}, \\
\frac{dz_{\rho_1+1}}{dx} &= \lambda_2 z_{\rho_1+1} + z_{\rho_1+2}, \\
\frac{dz_{\rho_1+2}}{dx} &= \qquad \lambda_2 z_{\rho_1+2} + z_{\rho_1+3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_{\rho_1+\rho_2-1}}{dz} &= \qquad\qquad \lambda_2 z_{\rho_1+\rho_2-1} + z_{\rho_1+\rho_2}, \\
\frac{dz_{\rho_1+\rho_2}}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_2 z_{\rho_1+\rho_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_{n-\rho_s+1}}{dx} &= \lambda_s z_{n-\rho_s+1} + z_{n-\rho_s+2}, \\
\frac{dz_{n-\rho_s+2}}{dx} &= \qquad \lambda_s z_{n-\rho_s+2} + z_{n-\rho_s+3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_{n-1}}{dx} &= \qquad\qquad \lambda_s z_{n-1} + z_n, \\
\frac{dz_n}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_s z_n.
\end{aligned}
\right\} \qquad (34)
$$

Если, в частности, все характеристические числа системы (1) различные или среди них имеются кратные, но все элементарные делители простые, то соответствующее каноническое матричное уравнение (30) примет вид

$$\frac{dZ}{dx} = Z\,[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n], \tag{35}$$

следовательно, система (1) может быть преобразована к чисто диагональному *каноническому виду*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= \lambda_2 z_2, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dz_n}{dx} &= \lambda_n z_n, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ могут быть и одинаковые.

Таким образом, мы доказали, что *всякая однородная линейная система (1) может быть приведена к каноническому виду (36) или (34), т. е. к чисто диагональному виду или к квазидиагональному, в зависимости от того, будут все элементарные делители матрицы простыми или среди них имеются кратные.*

Каноническая система (34) [и тем более (36)] обладает существенным преимуществом перед системой общего вида (1). В самом деле, мы всегда легко можем построить общее решение канонической системы, интегрируя последовательно уравнения каждой группы, начиная с последнего. В этом состоит практическая ценность приведения системы к каноническому виду.

Но возможность приведения системы к каноническому виду имеет более глубокое принципиальное теоретическое значение. Она позволяет при рассмотрении многих вопросов теории дифференциальных уравнений, связанных с рассмотрением линейных систем, например, при изучении устойчивости решений (движений) и при рассмотрении вопросов качественной (и аналитической) теории дифференциальных уравнений в случае, когда первое приближение представляет собою линейную систему с постоянными коэффициентами, ограничиться исследованием этих вопросов лишь для систем канонического вида, что, во-первых, облегчает исследование, и, во-вторых, дает нам уверенность в том, что, изучив тот или иной вопрос для всевозможных канонических систем данного порядка, мы тем самым охватываем все возможные случаи систем этого порядка.

Например, при изучении вопросов, связанных с системой второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{21}z, \\ \frac{dz}{dx} &= a_{12}y + a_{22}z, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

достаточно ограничиться рассмотрением систем трех видов:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lambda_1 y, \\ \frac{dz}{dx} &= \lambda_2 z; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lambda_1 y, \\ \frac{dz}{dx} &= \lambda_1 z; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lambda_1 y + z, \\ \frac{dz}{dx} &= \lambda_1 z. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Поэтому фундаментальная система решений системы (37) имеет одну из трех структур:

$$\begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{Vmatrix} S, \quad \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 x} \end{Vmatrix} S, \quad \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ xe^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} \end{Vmatrix} S. \tag{39}$$

Пример 1. Привести к каноническому виду и найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Перепишем эту систему, полагая $y = y_1$, $z = y_2$, в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 5y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= 4y_1 + 5y_2. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Здесь

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}, \; D(A - \lambda I) = \begin{Vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{Vmatrix} = 0, \; \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 9. \tag{42}$$

Следовательно, система (41), а тогда и данная система (40) приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= 9z_2. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Фундаментальной системой решений системы (41) будет

$$Y = \begin{Vmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{9x} \end{Vmatrix} S. \tag{44}$$

Найдем S. Имеем:

$$\begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix} S, \quad S \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix} S. \tag{45}$$

Пусть:

$$S = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}.$$

Тогда:

$$\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}.$$

$$5s_{11} + 4s_{12} = s_{11}, \quad 5s_{21} + 4s_{22} = 9s_{21},$$

$$s_{12} = -s_{11}, \; s_{22} = s_{21}.$$

Полагая $s_{11} = s_{21} = 1$, найдем: $s_{12} = -1$, $s_{22} = 1$, так что

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{46}$$

Подставляя найденное значение S в формулу (44), получим:

$$Y = \left\| \begin{matrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{9x} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e^x & -e^x \\ e^{9x} & e^{9x} \end{matrix} \right\| . \tag{47}$$

Общим решением системы (40) будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z &= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

Характеристическими числами будут* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Поэтому система (49) приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= 2z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= 3z_2, \\ \frac{dz_3}{dx} &= 6z_3. \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

Фундаментальной системой решений системы (49) будет:

$$Y = \left\| \begin{matrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6x} \end{matrix} \right\| S. \tag{51}$$

Пример 3. Дана система:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \right\} \tag{52}$$

Эта система имеет одно простое характеристическое число $\lambda_1 = 1$ и одно двухкратное характеристическое число $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Но элементарные делители, соответствующие кратному корню, простые: $\lambda + 2$, $\lambda + 2$. Поэтому си-

* См. п. **212**, пример 3.

стема (52) приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dx}&=z_1,\\ \frac{dz_2}{dx}&=-2z_2,\\ \frac{dz_3}{dx}&=-2z_3.\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

Фундаментальная система решений имеет вид:

$$Y=\begin{Vmatrix}e^x & 0 & 0\\ 0 & e^{-2x} & 0\\ 0 & 0 & e^{-2x}\end{Vmatrix}S.\tag{54}$$

Пример 4. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_2+y_3,\\ \frac{dy_2}{dx}&=y_1+y_2-y_3,\\ \frac{dy_3}{dx}&=y_2+y_3.\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Здесь также одно характеристическое число простое: $\lambda_1=0$, а другое двухкратное: $\lambda_2=\lambda_3=1$. Но элементарный делитель, соответствующий кратному корню, не простой: $(\lambda-1)^2$. Поэтому система (55) приводится не к чисто диагональному виду, а к квазидиагональному:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dx}&=0,\\ \frac{dz_2}{dx}&=z_2+z_3,\\ \frac{dz_3}{dx}&=z_3.\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

Фундаментальной системой решений будет:

$$Y=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & xe^x & e^x\end{Vmatrix}S.\tag{57}$$

Пример 5. В п. **141** мы, рассматривая вопрос о поведении интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}\ (ad-bc\neq 0)\tag{58}$$

в окрестности особой точки (0, 0), приводили это уравнение при помощи неособенного линейного преобразования к простейшим формам. Это равносильно приведению соответствующей системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=cx+dy,\\ \frac{dy}{dt}&=ax+by\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

к каноническому виду, т. е. к одной из трех систем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt}&=\lambda_1\eta,\\ \frac{d\xi}{dt}&=\lambda_2\xi;\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt}&=\lambda_1\eta,\\ \frac{d\xi}{dt}&=\lambda_1\xi;\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt}&=\lambda_1\eta+\xi,\\ \frac{d\xi}{dt}&=\lambda_1\xi.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Поэтому уравнение (58) приводится к одной из трех простейших форм:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi},\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\right),\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta+\xi^*}{\lambda_1\xi} \tag{61}$$

и остается изучить характер поведения интегральных кривых в зависимости от вида характеристических чисел, что и сделано в п. 141. Заметим, что если $\lambda_1=\lambda_2$, то случаю простых элементарных делителей $\lambda-\lambda_1$, $\lambda-\lambda_1$ матрицы $\begin{Vmatrix} c & d \\ a & b \end{Vmatrix}$ соответствует дикритический узел, а случаю кратного элементарного делителя $(\lambda-\lambda_1)^2$ соответствует вырожденный узел.

230. Понятие о приводимых системах. Пусть дана однородная линейная система

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{l=1}^{n}p_{lk}(t)\,x_l\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{62}$$

где коэффициенты p_{lk} (t) — непрерывные ограниченные функции в интервале (t_0, ∞). Запишем эту систему в матричной форме:

$$\frac{dX}{dt}=XP. \tag{63}$$

Будем называть матрицу Z *матрицей типа Ляпунова,* если она ограничена вместе с $\frac{dZ}{dt}$ и $D(Z^{-1})$.

Система (62) называется *приводимой,* если существует такая матрица Z типа Ляпунова, что подстановка

$$Y=XZ \tag{64}$$

приводит уравнение (63) к уравнению

$$\frac{dY}{dt}=YB, \tag{65}$$

где B — постоянная матрица.

---

* Первое из уравнений (61) может иметь комплексный вид. Нетрудно преобразовать уравнение (58) к вещественным простейшим формам. См.: И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1952, стр. 188—190.

Иными словами, система (62) называется приводимой, если существует такое линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_{11}(t)\,x_1 + z_{21}(t)\,x_2 + \ldots + z_{n1}(t)\,x_n, \\ y_2 &= z_{12}(t)\,x_1 + z_{22}(t)\,x_2 + \ldots + z_{n2}(t)\,x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= z_{1n}(t)\,x_1 + z_{2n}(t)\,x_2 + \ldots + z_{nn}(t)\,x_n, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

где коэффициенты преобразования $z_{ik}(t)$ суть ограниченные функции вместе с их производными и определителем обратного преобразования, что новые неизвестные функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \ldots + b_{n1}y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} &= b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{n2}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

с постоянными коэффициентами b_{ik}.

Понятие приводимой системы было введено А. М. Ляпуновым*. Ляпунов выяснил роль приводимых систем при исследовании устойчивости решений нелинейных систем уравнений, первое приближение которых явно содержит время.

В качестве примера приводимой системы А. М. Ляпунов указал лишь на систему, коэффициенты которой являются периодическими функциями с одним периодом $\omega > 0$.

Общая теория приводимых систем была построена в 1946 г. Н. П. Еругиным**. В частности им была доказана следующая теорема, дающая необходимое и достаточное условие приводимости.

Теорема. *Для того чтобы система*

$$\frac{dX}{dt} = XP \tag{68}$$

была приводима к системе

$$\frac{dY}{dt} = YB \tag{69}$$

с постоянной матрицей B, необходимо и достаточно, чтобы интегральная матрица системы (68) имела структуру

$$X = e^{Bt}Z, \tag{70}$$

где B — постоянная матрица, а Z — матрица типа Ляпунова.

---

* См. первую сноску на стр. 278.

** См. сноску на стр. 424.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 231. Связь между однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка и соответствующей ему системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме. В настоящей главе мы даем понятие об уравнениях с частными производными первого порядка. При этом мы ограничиваемся изложением простейших сведений из этой теории, ставя себе целью лишь показать связь линейного уравнения с частными производными первого порядка с системой обыкновенных дифференциальных уравнений и дать методы построения общего решения и решения задачи Коши, основанные на этой связи.

Согласно сказанному во введении, уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид*:

$$\Phi\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0. \qquad (1)$$

Решением этого уравнения называется функция

$$u=u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \qquad (2)$$

определенная и непрерывная вместе с частными производными в некоторой области изменения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обращающая уравнение (1) в тождество (в этой области). При этом предполагается, что значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых определена функция (2), и значения, принимаемые этой функцией и ее частными производными, лежат в области определения функции Φ.

Если в уравнении (1) функция Φ зависит линейно от частных производных от искомых функций, то оно называется *ли-*

* См. введение, стр. 6.

нейным уравнением. Линейное уравнение можно записать в виде

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \qquad (3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда правая часть уравнения (3) равна тождественно нулю, а коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не зависят от искомой функции u, так что мы имеем:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \qquad (4)$$

Такое уравнение называется *однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка.*

Ясно, что уравнение (4) имеет решение вида

$$u = c\,(c = \mathrm{const}). \qquad (5)$$

В дальнейшем такое решение будем называть *очевидным* решением. Ниже мы докажем, что уравнение (4) (при некоторых предположениях относительно коэффициентов) имеет бесчисленное множество решений, отличных от очевидных.

С этой целью наряду с уравнением (4) мы будем рассматривать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \qquad (6)$$

Эта система называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными* (4).

Докажем две теоремы, устанавливающие связь между уравнением (4) и системой (6).

При этом относительно коэффициентов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ уравнения (4) будем предполагать, что они определены и непрерывны вместе с частными производными по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности заданной точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и что в этой точке они не обращаются одновременно в нуль, так что точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является н е о с о б о й точкой системы (6). Будем, например, считать, что

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \neq 0. \qquad (7)$$

При сделанном предположении система (6) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов, определенных и непрерывных вместе с частными производными в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Это следует из того, что система (6) равносильна следующей нормальной системе $n-1$ уравнений

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \tag{8}$$

для которой выполняются условия теоремы о существовании интегралов нормальной системы [138].

Теорема 1. *Всякий интеграл системы* (6) *является (неочевидным) решением уравнения* (4).

В самом деле, пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть интеграл системы (6), определенный в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Тогда полный дифференциал функции ψ тождественно равен нулю в силу системы (6) или системы (8), т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n \equiv 0, \tag{9}$$

где дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ нужно заменить их значениями из системы (8), а именно:

$$dx_1 = \frac{X_1}{X_n}dx_n, \; dx_2 = \frac{X_2}{X_n}dx_n, \; \ldots, \; dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}dx_n,$$

так что мы будем иметь тождество

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]dx_n \equiv 0 \tag{10}$$

или (сокращая на dx_n и умножая на X_n)

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{11}$$

Это тождество и означает, что функция $u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (4).

Теорема 2. *Всякое (неочевидное) решение уравнения* (4) *является интегралом системы* (6).

Действительно, пусть $u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (неочевидное) решение уравнения (4). Тогда

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{12}$$

Вычисляя полный дифференциал функции ψ в силу системы (6) или, что то же, в силу системы (8), имеем:

$$d\psi\Big|_{(6)} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n\,_{(8)} =$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)dx_n =$$

$$= \left(X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n}\, dx_n,$$

откуда вследствие тождества (12) будет $d\psi|_{(6)} \equiv 0$, т. е. ψ есть интеграл системы (6).

Пример. Уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

соответствует система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}. \tag{14}$$

Эта система имеет интегралы

$$\psi_1 = xz, \quad \psi_2 = x\sqrt{y}. \tag{15}$$

Следовательно, функции

$$u_1 = xz, \quad u_2 = x\sqrt{y} \tag{16}$$

являются решениями уравнения (13).

232. Построение общего решения однородного линейного уравнения. *Пусть*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{17}$$

суть независимые интегралы системы (6). *Тогда функция*

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{18}$$

где Φ — *любая функция, имеющая непрерывные производные по* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ (*в том числе и* $\Phi = \mathrm{const}$) *будет решением уравнения* (4).

В самом деле, подставляя функцию (18) в уравнение (4) и принимая во внимание, что функции (17) являются решениями уравнения (4), получаем тождество:

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0, \tag{19}$$

а это и означает, что функция (18) есть решение уравнения (4).

Формулу (18) будем называть *общим решением* уравнения (4).

Обращаем внимание читателя на то, что в отличие от обыкновенных уравнений, общее решение (18) уравнения (4) с частными производными содержит не произвольные постоянные, но уже произвольную функцию.

Таким образом, *задача построения общего решения уравнения (4) равносильна задаче нахождения $n-1$ независимых интегралов соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме* (6).

Рассмотрим случай двух независимых переменных. В этом случае, обозначая искомую функцию через z, а независимые переменные через x и y, мы вместо уравнения (4), будем иметь:

$$X(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{20}$$

Соответствующая система (6) обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме вырождается в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{X(x,\ y)}=\frac{dy}{Y(x,\ y)}. \tag{21}$$

Если $\psi(x,\ y)$ есть интеграл этого уравнения, то

$$z=\Phi[\psi(x,\ y)], \tag{22}$$

где $\Phi(\psi)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от ψ, будет общим решением уравнения (20).

Если рассматривать x, y и z как прямоугольные координаты точки трехмерного пространства, то решению $z=z(x,\ y)$ уравнения (20) соответствует некоторая поверхность. Эта поверхность называется *интегральной поверхностью* уравнения (20).

Пример 1. Дано уравнение

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{23}$$

Составляем соответствующую систему обыкновенных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n} \tag{24}$$

и, интегрируя, находим:

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1,\quad \frac{x_3}{x_1}=C_2,\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_1}=C_{n-1}, \tag{25}$$

так что

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},\ \ldots,\ \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \tag{26}$$

Поэтому общим решением уравнения (23) будет

$$u=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1},\ldots,\ \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{27}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от отношений $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}$, т. е. u есть произвольная непрерывно дифференцируемая однородная функция нулевой степени от n независимых переменных

$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, решениями уравнения (23) будут функции:

$$u_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad u_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots, u_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}, \quad u_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_1},$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2, \; u_{n+2} = \sin\frac{x_2}{x_1}, \quad u_{n+3} = e^{\frac{x_2}{x_1}} \text{ и т. п.} \tag{28}$$

Мы получили, таким образом, обращение известной теоремы Эйлера об однородных функциях нулевой степени* .

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{dy} + (y-z)\frac{\partial y}{\partial z} = 0. \tag{29}$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{30}$$

Функции**

$$\psi_1 = x+y+z; \; \psi_2 = x^2+y^2+z^2 \tag{31}$$

являются независимыми интегралами системы (30). Поэтому общим решением уравнения (29) будет:

$$u = \Phi(x+y+z, \quad x^2+y^2+z^2), \tag{32}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух независимых переменных. Например, решениями уравнения (32) будут функции:

$$u_1 = x+y+z, \quad u_2 = x^2+y^2+z^2, \quad u_3 = (x+y+z)^2 \text{ и т. п.} \tag{33}$$

Пример 3. Дано уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{34}$$

Здесь:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \; \psi = x^2+y^2. \tag{35}$$

Поэтому общее решение имеет вид

$$z = \Phi(\psi), \; z = \Phi(x^2+y^2) \tag{36}$$

и представляет собою, как известно, семейство поверхностей вращения с осью вращения Oz. Таким образом, уравнение (34) есть ни что иное, как дифференциальное уравнение всех поверхностей вращения с осью вращения Oz. Интегральными поверхностями уравнения (34) являются поверхности вращения (36). В частности, при $\Phi(\psi) = \psi$ получаем параболоид вращения:

$$z = x^2+y^2, \tag{37}$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{R^2-\psi}$ будем иметь сферическую поверхность:

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}, \tag{38}$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$ получится конус:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{39}$$

---

* См. сноску на стр. 67.

** См. п. **117**, пример 1.

при $\Phi(\psi) = c = \text{const}$ будем иметь плоскость:

$$z = C. \tag{40}$$

233. Решение задачи Коши для однородного линейного уравнения. Задача Коши для уравнения (4) ставится так. Среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{41}$$

которое удовлетворяет *начальным условиям*:

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)} \tag{42}$$

или

$$u\,|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{43}$$

где φ — заданная (непрерывно дифференцируемая) функция от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, т. е. при фиксированном значении одного из аргументов решение (41) обращается в заданную функцию остальных аргументов.

В случае, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, т. е. когда мы имеем уравнение (20), задача Коши состоит в том, чтобы найти решение

$$z = f(x, y), \tag{44}$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$z = \varphi(y) \text{ при } x = x_0, \tag{45}$$

где $\varphi(y)$ — заданная функция от y. Геометрически это означает, что среди всех интегральных поверхностей, определяемых уравнением (20), ищется интегральная поверхность (44), которая проходит через заданную кривую (45), лежащую в плоскости $x = x_0$ параллельной плоскости yOz.

Обращаем внимание читателя на отличие постановки задачи Коши для уравнения с частными производными от постановки задачи Коши для обыкновенного уравнения. В то время как для обыкновенного уравнения первого порядка задача Коши состояла в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку, для уравнения с частными производными (20) задача Коши состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую.

Мы уже знаем, что общее решение уравнения (4) дается формулой (18),

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Сравнивая эту формулу с условием (43), мы видим, что решение задачи Коши сводится к определению вида функции Φ так, чтобы

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\,|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{46}$$

Если ввести обозначения:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_{n-1}(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_{n-1},\end{array}\right\} \tag{47}$$

то равенство (46) перепишется так:

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}). \tag{48}$$

Система (47) разрешима относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$, если $X_n\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}) \neq 0$, что мы и предполагаем. Разрешая систему (47) относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, получаем:

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}).\end{array}\right\} \tag{49}$$

Если теперь в качестве Φ взять функцию

$$\Phi(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}) = \varphi[\omega_1(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1})$$
$$\omega_2(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),\ \ldots,\ \omega_{n-1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1})], \tag{50}$$

то условие (48) будет выполнено. Действительно, мы имеем:

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}) =$$
$$= \varphi[\omega_1(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\ \omega_2(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\ \ldots,$$
$$\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1})] = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}).$$

Следовательно, *функция*

$$u = \varphi[\omega_1(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),$$
$$\omega_2(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),\ \ldots,\ \omega_{n-1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1})] \tag{51}$$

дает искомое решение задачи Коши. Здесь функция φ есть та самая функция, которая участвует в начальных условиях (43).

Таким образом, мы приходим к следующему правилу решения задачи Коши:

1) *нужно составить соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и найти $n-1$ независимых интегралов:*

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n);\end{array}\right\} \tag{52}$$

2) заменить в интегралах (52) независимую переменную заданным ее значением $x_n^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) &= \overline{\psi}_1, \\ \psi_2\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) &= \overline{\psi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^{(0)}) &= \overline{\psi}_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

и разрешить систему (53) относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1\,(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2\,(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}\,(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_{n-1}); \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

3) построить функцию

$$u = \varphi\,[\omega_1\,(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}), \\ \omega_2\,(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),\ \ldots,\ \omega_{n-1}\,(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1})], \tag{55}$$

которая и дает решение задачи Коши.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{56}$$

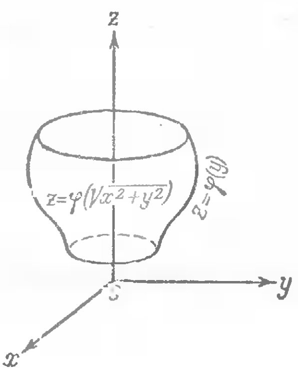


Рис. 52

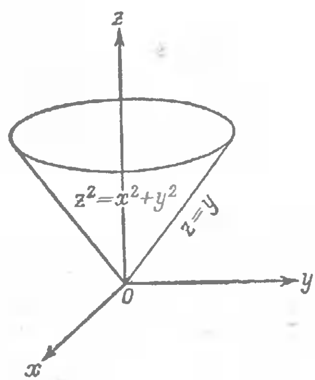


Рис. 53

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$z = \varphi\,(y) \ \text{при}\ x = 0, \tag{57}$$

т. е. найдем интегральную поверхность, проходящую через кривую (57).

Имеем:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}\,,\ \psi = x^2 + y^2,\ y^2 = \overline{\psi},\ y = \sqrt{\overline{\psi}},\quad z = \varphi\ (\sqrt{\psi}).$$

Поэтому искомым решением будет

$$z = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}). \quad (58)$$

Мы получили поверхность вращения с осью вращения Oz, проходящую через кривую (57), или, что то же, поверхность, образованную вращением кривой (57) вокруг оси Oz (рис. 52).

В частности, если $\varphi(y) = y$, то $z = \sqrt{x^2+y^2}$ или $z^2 = x^2 + y^2$ — конус, полученный вращением прямой $z=y$ вокруг оси Oz (рис. 53).

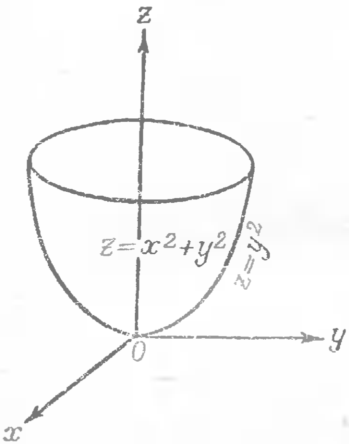


Рис. 54

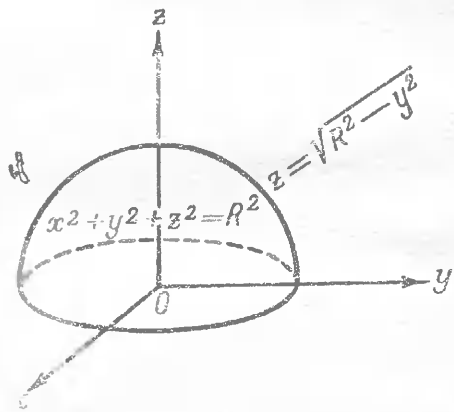


Рис. 55

При $\varphi(y) = y^2$ имеем $z = x^2 + y^2$ — параболоид, полученный вращением параболы $z = y^2$ вокруг оси Oz (рис. 54).

Если $\varphi(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$, то $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ или $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, полусфера, проходящая через полуокружность $z = \sqrt{R^2 - y^2}$ (рис. 55)

§ 2. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

234. Построение общего решения неоднородного линейного уравнения. Уравнение вида

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} +$$
$$+ \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \quad (1)$$

будем называть *неоднородным линейным уравнением с частными производными первого порядка.* Это уравнение называют также *квазилинейным.* Отличие уравнения (1) от уравнения предыдущего параграфа заключается в том, что коэффициенты X_k могут зависеть от u, и, кроме того, имеется свободый член R. К этому же типу мы относим уравнение, у которого $R \equiv 0$, но хоть один из X_k непременно зависит от u.

Относительно функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и R будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$, причем $X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0$.

Будем искать решение уравнения (1) в неявном виде:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{2}$$

где функция V имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причем

$$\frac{\partial V(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)})}{\partial u} \neq 0, \tag{3}$$

по крайней мере, в некоторой области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ с тем, чтобы в этой области была гарантирована разрешимость уравнения (2) относительно искомой функции u.

Считая, что в равенстве (2) функция u есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемая этим равенством, продифференцируем это равенство полным образом по независимой переменной (которая входит в уравнение (2) явно и неявно через u). Получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Подставляя эти значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ в уравнение (1) и перенося все члены в левую часть, получим:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{6}$$

Это есть однородное линейное уравнение относительно функции V.

Составляем соответствующую ему систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \tag{7}$$

Предположим, что мы нашли n независимых интегралов этой системы:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \\ &\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Тогда общее решение уравнения (6) дается формулой

$$V = \Phi[\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)]. \tag{9}$$

Приравнивая функцию (9) нулю, мы получим, согласно (2), решение данного уравнения (1) в следующем (неявном) виде:

$$\Phi[\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)] = 0. \tag{10}$$

Будем называть это решение *общим решением* уравнения (1).

Систему (7) будем называть *системой обыкновенных уравнений, соответствующей уравнению* (1).

Таким образом, *для нахождения общего решения уравнения (1) нужно составить соответствующую ему систему обыкновенных уравнений (7), найти n независимых интегралов этой системы и приравнять нулю произвольную дифференцируемую функцию этих интегралов. Полученное равенство (10) и представляет собою общее решение уравнения (1) в неявном виде. Разрешая его относительно u (если это возможно в элементарных функциях), найдем общее решение в явном виде.*

Пример 1. Дано уравнение

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \quad (m \neq 0). \tag{11}$$

Составляем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}. \tag{12}$$

Находим ее интегралы:

$$\psi_1 \equiv \frac{x_2}{x_1}, \; \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}, \quad \psi_n = \frac{u}{x_1^m}. \tag{13}$$

Общим решением уравнения (11) будет:

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}\right) = 0. \tag{14}$$

Разрешая относительно $\frac{u}{x_1^m}$, получим:

$$\frac{u}{x_1^m} = f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{15}$$

откуда

$$u = x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{16}$$

где f — произвольная функция, так что решением данного уравнения является произвольная однородная непрерывно дифференцируемая функция степени $m \neq 0$. Объединяя этот результат с результатом примера 1 п. **232**, мы получаем обращение теоремы Эйлера об однородных функциях любой степени m.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(1+\sqrt{z-x-y})\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2. \tag{17}$$

Составляем систему (7):

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}. \tag{18}$$

Ее интегралами будут* :

$$\psi_1 = z-2y,\quad \psi_2 = 2\sqrt{z-x-y}+y. \tag{19}$$

Поэтому общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\Phi\,(z-2y,\ 2\sqrt{z-x-y(+y)})=0, \tag{20}$$

где Φ — произвольная (непрерывно дифференцируемая) функция.

Нетрудно проверить, что функция

$$z = x+y \tag{21}$$

тоже является решением уравнения (17). Однако это решение не содержится в формуле (20). Такое решение называется *специальным*** . Таким образом, *уравнения с частными производными, так же как и обыкновенные уравнения, могут иметь решения, не содержащиеся в общем решении.*

235. Решение задачи Коши для неоднородного линейного уравнения. *Задача Коши* для неоднородного уравнения (1) ставится так же, как и для однородного уравнения. Требуется среди всех решений уравнения (1) найти такое решение

$$u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{22}$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$u = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \tag{23}$$

где φ — заданная (непрерывно дифференцируемая) функция от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$.

Покажем, как найти решение задачи Коши, зная общее решение:

$$\Phi\,[\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u),\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u),\ \ldots,\ \psi_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u)]=0. \tag{24}$$

---

* См. п. **117**, пример 2.

** См.: В. В. Степанов. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958, стр. 347, 348.

Дело сводится, так же как и при решении задачи Коши для однородного уравнения, к определению вида функции Ф. Переписывая начальные условия (23) в виде

$$u - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0 \text{ при } x_n = x_n^{(0)} \tag{25}$$

и сравнивая эти условия с уравнением (24), мы видим, что функцию Ф нужно выбрать так, чтобы

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{26}$$

если под $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n$ понимать функции, получающиеся из интегралов системы (7), заменой x_n начальным значением $x_n^{(0)}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \overline{\psi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \overline{\psi}_n. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Разрешая систему (27) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ x_2 &= \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ u &= \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если теперь в качестве Ф взять функцию

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) &= \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ &- \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)], \end{aligned} \tag{29}$$

то условие (26) будет, очевидно, выполнено, Следовательно, *формула*

$$\begin{aligned} \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \\ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)] = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

и дает искомое решение задачи Коши в неявном виде. Разрешив (30) *относительно* u, *мы получим решение задачи Коши в явном виде* (22).

Таким образом, мы приходим к следующему правилу решения поставленной задачи Коши для неоднородного уравнения (1):

1) *нужно составить соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и найти* n *независимых интегралов:*

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, u),\\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, u),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, u);\end{array}\right\}\qquad(31)$$

2) *заменить в интегралах (31) независимую переменную* x_n *заданным ее значением* $x_n^{(0)}$:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u)=\overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u)=\overline{\psi}_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u)=\overline{\psi}_n\end{array}\right\}\qquad(32)$$

и разрешить систему (32) *относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$:

$$\left.\begin{array}{r}x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n),\\ x_2=\omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n),\\ u=\omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n);\end{array}\right\}\qquad(33)$$

3) *составить соотношение*

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)-\varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)]=0, \qquad(34)$$

которое и дает искомое решение задачи Коши в неявном виде. Разрешая (34) *относительно* u, *мы получим решение нашей задачи Коши в явном виде.*

Пример 1. Рассмотрим уравнение (17),

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$z=2x \text{ при } y=0. \qquad(35)$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений (18) имеет интегралы (19),

$$\psi_1=z-2y, \quad \psi_2=2\sqrt{z-x-y}+y.$$

Полагая в этих интегралах $y=0$, получим:

$$\left.\begin{array}{r}z=\overline{\psi}_1,\\ 2\sqrt{z-x}=\overline{\psi}_2.\end{array}\right\}\qquad(36)$$

Разрешая эту систему относительно x и z, найдем:

$$\left.\begin{array}{r}x=\overline{\psi}_1-\dfrac{\overline{\psi}_2^2}{4},\\ z=\overline{\psi}_1.\end{array}\right\}\qquad(37)$$

Поэтому, согласно формуле (34), решением поставленной задачи Коши будет

$$\psi_1 - 2\left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0, \quad 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0 \tag{38}$$

или (заменяя ψ_1 и ψ_2 их выражениями)

$$2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0. \tag{39}$$

Пример 2. Возьмем то же уравнение (17),

$$(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2,$$

и найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$z = x \text{ при } y = 0. \tag{40}$$

Пользуясь выкладками предыдущего примера, находим, что искомым решением будет:

$$\psi_1 - \left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0 \text{ или } \psi_2 = 0, \tag{41}$$

т. е.

$$2\sqrt{z - x - y} + y = 0 \tag{42}$$

или

$$z = \frac{y^2}{4} + x + y. \tag{43}$$

Решение $z=x+y$ тоже удовлетворяет начальным условиям (40). Таким образом, поставленная задача Коши имеет не единственное решение.

На этом мы заканчиваем изложение начальных сведений из теории уравнений с частными производными первого порядка, которые непосредственно примыкают к теории обыкновенных дифференциальных уравнений* .

Обстоятельное и строгое изложение теории уравнений с частными производными первого порядка читатель найдет в книгах Н. М. Гюнтера, И. Г. Петровского, В. И. Смирнова и В. В. Степанова** .

* Более полное изложение начальных сведений из теории линейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка см. в книгах: Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957, гл. VI; Ф. С. Гудименко. Диференціальні рівняння. Изд-во Харьковского гос. университета, 1958, §§ 35, 36; Н. М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Методическое пособие для заочников. Изд-во ЛГУ, 1963, стр. 374—390.

** Н. М. Гюнтер. Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка, 1935. И. Г. Петровский. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1952 (дополнение); Лекции об уравнениях с частными производными, 1950. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, 1953. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. 1958, стр. 330—427. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., «Наука», 1966.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

* Д. у. — дифференциальное уравнение.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава десятая

Глава одиннадцатая

Глава двенадцатая